



Research Article

OPEN ACCESS

Kharazmi Journal of Earth Sciences

Journal homepage <https://gnf.khu.ac.ir>

Formulation of a largely theoretical approach for inferring anisotropic drained elastic stiffnesses in saturated granular soils from undrained features

Ehsan Pegah^{1*}

1. Department of Applied Geology, Faculty of Earth Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran

Article info

Article history

Received: 13 October 2025

Accepted: 20 December 2025

Keywords:

Saturated granular soils, Cross-anisotropy, Drained elastic stiffness, Undrained elastic features, Seismic waves velocity, Nondestructive seismic methods.



Abstract

The anisotropic elastic stiffnesses of granular soil sediments play an important role in analyzing many geotechnical and geological engineering problems. In this study, the feasibility of calculating drained elastic stiffnesses in saturated granular soils based on undrained features was investigated. By assuming cross-anisotropy in granular soils, a set of equations from the theory of elasticity was extracted from the literature and then combined with an experimentally developed relationship in this study to establish a link between drained and undrained parameters. Subsequently, a novel approach was proposed for computing the drained anisotropic Young's moduli from two anisotropic components of the shear modulus and the vertical component of the Young's modulus under undrained conditions. To evaluate the accuracy and reliability of the proposed approach, data related to anisotropic elastic parameters from 46 laboratory tests conducted on seven different soil specimens representing three types of sand from various sites worldwide were compiled from the literature. The drained anisotropic Young's moduli for each test were then calculated using the proposed method and compared with directly measured values. The results showed a strong agreement between the calculated and measured moduli, confirming the validity and efficiency of the developed approach. The findings of this study can serve as a reliable basis for the rational and cost-effective characterization of anisotropic elastic stiffnesses in saturated granular soils using nondestructive seismic testing techniques.

Introduction

Accurate characterization of elastic properties in granular soils is central to many problems in soil mechanics and geotechnical engineering. Elastic stiffnesses at very small strains play a fundamental role in analyses ranging from seismic site response to foundation stiffness and ground improvement design (Anhdan and Koseki, 2005; Gu and Yang, 2018; He et al., 2017; Pegah et al., 2022; Pegah and Liu, 2025; Talae Firozjaee et al., 2024; Zhu et al., 2020).

Depending on drainage conditions in a saturated soil mass, elastic stiffnesses are commonly classified into two sets: undrained moduli (total-stress stiffness) and drained moduli (effective-stress stiffness). In granular soils, owing to their typically high hydraulic conductivity, drainage is usually rapid and drained

parameters are therefore of primary engineering importance (Clayton, 2011; Das and Sobhan, 2014).

Direct determination of drained elastic parameters in the laboratory is technically challenging. Sources of uncertainty include: instability or poor contact of strain gauges around the specimen, misalignment and coupling of transducers, calibration errors, non-uniform deformability of specimens, and ambiguous identification of P- and S-wave arrivals in bender/extender element tests. These practical difficulties can compromise accuracy of drained stiffness measurements (Gu et al., 2015; Kuwano and Jardine, 2002; Khan et al., 2011; Nishimura, 2014). Thus, the main objective of this study is to present a novel technique for computing two drained cross-anisotropic Young's moduli, E'_v and E'_h , from undrained

DOI <http://doi.org/10.22034/KJES.2025.11.2.107023>

*Corresponding author: Ehsan Pegah; E-mail: e.pegah@khu.ac.ir

How to cite this article: Pegah, E., 2025. Formulation of a largely theoretical approach for inferring anisotropic drained elastic stiffnesses in saturated granular soils from undrained features. Kharazmi Journal of Earth Sciences 11(2), 366- 394. <http://doi.org/10.22034/KJES.2025.11.2.107023>



BY NC

features, which in turn can be calculated based on P- and S-wave seismic velocities. These velocities may be measured through nondestructive seismic surveys. The proposed approach therefore enables the use of nondestructive — i.e., in situ — seismic measurements to obtain the required wave velocities, allowing rapid and environmentally friendly stiffness calculation under natural field conditions (Foti et al., 2015; Pegah and Liu, 2016, 2020a, 2020b; Pegah et al., 2016; Sloan et al., 2013; Uyanik, 2011).

In cross-anisotropy in saturated granular sediments, we combine elasticity theory with (i) the relation proposed by Lings (Lings, 2001), (ii) the linear inequality by Chowdhury and King (Chowdhury and King, 1971, 1972) that links anisotropic Poisson ratios and Young's moduli ratios, and (iii) an experimentally developed correlation derived in this study. The resulting system yields a practical route to compute E'_v and E'_h for cross-anisotropic saturated granular media from undrained parameters. To validate the method, anisotropic elastic properties from 46 laboratory tests on seven different soil specimens (three sand types) were compiled from the literature and used to evaluate the accuracy of the proposed procedure.

Skeleton of the proposed approach

The assumption of cross-anisotropy in natural soil sediments is a reliable and widely adopted simplification for characterizing various geotechnical features (Clayton, 2011; Dutta et al., 2020; Fioravante, 2000; Gu et al., 2017; Pegah et al., 2017, 2024). Pegah et al. (2021) demonstrated that three independent elastic parameters under undrained conditions can be confidently calculated based on the seismic wave velocities V_{PH} , V_{SV} , and V_{SH} obtained from seismic refraction surveys, as expressed by Eqs. (1)-(3):

$$E'_v = \rho V_{SH}^2 [3 - 4(V_{SH}/V_{PH})^2] \quad (1)$$

$$E'_h = \rho [(3V_{PH}^2 - 4V_{SH}^2)/(V_{PH}/V_{SH})^2 - 1] \quad (2)$$

$$G'_{vh} = \rho V_{SV}^2 \quad (3)$$

where E'_v and E'_h are the undrained Young's moduli in the vertical and horizontal directions, respectively; V_{PH} is the P-wave velocity in horizontal direction, V_{SV} is the

vertically polarized S-wave velocity, V_{SH} is the horizontally polarized S-wave velocity, and ρ is the soil density.

Lings (2001) and Nishimura (2014) showed that the undrained elastic stiffness E'_v in a cross-anisotropic soil mass can be expressed as a function of the drained elastic parameters:

$$E'_v = E'_v [2(1 - \nu'_{hh})E'_v + (1 - 4\nu'_{vh})E'_h] / [2(1 - \nu'_{hh})E'_v - 4(\nu'_{vh})^2 E'_h] \quad (4)$$

where ν'_{vh} and ν'_{hh} are the drained Poisson's ratios (ν'_{ij} denotes the strain produced in direction j due to a unit strain in direction i), and E'_v and E'_h are the drained Young's moduli in the vertical and horizontal directions, respectively.

It has also been shown that the shear moduli G'_{vh} and G'_{hh} are practically independent of drainage, and thus equal to their undrained counterparts:

$$G'_{vh} = G'_{vh} \quad (5)$$

$$G'_{hh} = G'_{hh} \quad (6)$$

According to the developed experimental correlation proposed in this study (Eq. (7)), which is based on a comprehensive database of reported elastic parameters from the literature (Bellotti et al., 1996; Dutta et al., 2020; Ezaoui and Di Benedetto, 2009; Fioravante, 2000; Fioravante et al., 2013; Gu et al., 2017), the horizontal drained Young's modulus E'_h can be expressed as a power function of the anisotropic shear modulus ratio:

$$E'_h = E'_v (G'_{hh}/G'_{vh})^{1.8} \quad (7)$$

From the theory of elasticity, the Poisson's ratio ν'_{hh} can be rewritten as $\nu'_{hh} = (E'_h/2G'_{hh}) - 1$. Substituting this expression into Eq. (4), along with Eqs. (5)-(7), yields a quadratic equation in terms of E'_v with coefficients defined as functions of E'_v , G'_{vh} , G'_{hh} , and ν'_{vh} .

Moreover, considering the physical condition proposed by Chowdhury and King (1971, 1972) for the combination of elastic parameters (Eq. (8)), and assuming the upper bound as the maximum theoretical value of E'_v , the following expression is obtained:

$$\nu'_{hh} < 1 - (E'_h/E'_v)\nu'_{vh} \quad (8)$$

$$E'_v = (4E'_v G'_{vh})^{1.8} / [G'_{hh}^{0.8} (G'_{hh} + E'_v)] \quad (9)$$

Finally, by substituting E'_v from Eq. (9) into Eq. (7), the horizontal drained Young's modulus E'_h can be readily obtained.

Conclusions

The main objective of this study was to develop an efficient approach for calculating the drained elastic stiffnesses in saturated granular soils based on measured undrained stiffnesses. By employing several equations derived from the theory of elasticity and combining them with an experimental correlation developed in this research, novel relationships for the drained elastic moduli E'_v and E'_h were established. These relationships enable their calculation from three undrained moduli, E_v^u , G_{vh}^u , and G_{hh}^u . The latter parameters were, in turn, expressed as functions of the anisotropic components of P- and S-wave seismic velocities, whose field measurements can be conducted through nondestructive seismic techniques. To evaluate the accuracy and validity of the proposed approach, a comprehensive dataset comprising anisotropic elastic parameters from 46 laboratory tests on different sand types was compiled from the literature. The drained Young's moduli E'_v and E'_h for each test were calculated using the proposed method and subsequently compared with the directly measured reference values. The results demonstrated a strong agreement between the calculated and reference values, confirming both the reliability and robustness of the developed approach.

References

- Anhdan, L., Koseki, J., 2005. Small strain behavior of dense granular soils by true triaxial tests. *Soils and Foundations* 45 (3), 21-38.
- Bellotti, R., Jamiolkowski, M., Lo Presti, D.C.F., O'Neill, D.A., 1996. Anisotropy of small strain stiffness in Ticino sand. *Geotechnique* 46 (1), 115-131.
- Chowdhury, R.N., King, G.J.W., 1971. Discussion: Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique* 21 (2), 181-183.
- Chowdhury, R.N., King, G.J.W., 1972. Discussion: Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique* 22 (1), 183-185.
- Clayton, C.R.I., 2011. Stiffness at small strain: research and practice. *Geotechnique* 61, 1, 5-37.
- Das, B.M., Sobhan, K., 2014. *Principles of Geotechnical Engineering*, 4th ed. Cengage Learning, Stamford, USA.
- Dutta, T.T., Otsubo, M., Kuwano, R., Sato, T., 2020. Estimating multidirectional stiffness of soils using planar piezoelectric transducers in a large triaxial apparatus. *Soils and Foundations* 60, 1269- 1286.
- Ezaoui, A., Di Benedetto, H., 2009. Experimental measurements of the global anisotropic elastic behaviour of dry Hostun sand during triaxial tests, and effect of sample preparation. *Geotechnique* 59 (7), 621-635.
- Fioravante, V., 2000. Anisotropy of small strain stiffness of Ticino and Kenya sands from seismic wave propagation measured in triaxial testing. *Soils and Foundations* 40 (4), 129-142.
- Fioravante, V., Giretti, D., Jamiolkowski, M., 2013. Small strain stiffness of carbonate Kenya Sand. *Engineering Geology* 161, 65-80.
- Foti, S., Lai, C.G., Rix, G., Strobbia, C., 2015. *Surface wave methods for near-surface site characterization*, 1st Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, USA.
- Gu, X.Q., Hu, J., Huang, M., 2017. Anisotropy of elasticity and fabric of granular soils. *Granular Matter*, 19:33.
- Gu, X.Q., Yang, S., 2018. Why the OCR may reduce the small strain shear stiffness of granular materials? *Acta Geotechnica* 13, 1467-1472.
- Gu, X.Q., Yang, J., Huang, M., Gao, G., 2015. Bender element tests in dry and saturated sand: Signal interpretation and result comparison. *Soils and Foundations* 55 (5), 951-962.
- He, H., Li, M., Senetakis, K., 2017. A note on influence of stress anisotropy on the Poisson's ratio of dry sand. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* 9, 1159-1164.
- Khan, Z., Cascante, G., Hesham EI Naggar, M., 2011. Measurement of dynamic properties of stiff specimens using ultrasonic waves. *Canadian Geotechnical Journal* 48, 1-15.
- Kuwano, R., Jardine, R.J., 2002. On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains. *Geotechnique* 52 (10), 727-749.
- Lings, M. L., 2001. Drained and undrained anisotropic elastic stiffness parameters. *Geotechnique* 51, 6, 555-565.

- Nishimura, S., 2014. Cross-anisotropic deformation characteristics of natural sedimentary clays. *Geotechnique* 64, 12, 981-996.
- Pegah, E., Gu, X.Q., Liu, H., 2024. Fabric anisotropy of granular soils and its dependency on grading and particles specifications. *Acta Geotechnica* 19, 7619-7633.
- Pegah, E., Liu, H., 2016. Application of near-surface seismic refraction tomography and multichannel analysis of surface waves for geotechnical site characterizations: A case study. *Engineering Geology* 208, 100-113.
- Pegah, E., Liu, H., 2020a. Evaluation of hyperbolic stress-strain and bulk-modulus model parameters in granular soil mass using seismic surveying. *Engineering Geology* 266, 105456.
- Pegah, E., Liu, H., 2020b. Evaluating the overconsolidation ratios and peak friction angles of granular soil deposits using noninvasive seismic surveying. *Acta Geotechnica* 15, 3193-3209.
- Pegah, E., Liu, H., 2025. Determination of cross-anisotropic elastic constants of in situ soils using joint application of seismic refraction and downhole surveys. *Transportation Geotechnics* 55, 101689.
- Pegah, E., Liu, H., Dastanboo, N., 2017. Evaluation of the lateral earth pressure coefficients at-rest in granular soil deposits using the anisotropic components of S-wave velocity. *Engineering Geology* 230, 55-63.
- Pegah, E., Liu, H., Gholami, A., 2021. Estimating drained cross-anisotropic elastic parameters in saturated clays using the undrained properties. *Engineering Geology* 293, 106340.
- Pegah, E., Liu, H., Gu, X.Q., Gholami, A., 2022. A semi-analytical approach for efficient calculation of drained cross-anisotropic elastic moduli in saturated granular soils from undrained attributes. *Computers and Geotechnics* 148, 104794.
- Pegah, E., Mahmoodi, M., Siavashpoo, A., 2016. Evaluation of seismic hazard and site geodynamic properties by using geophysical methods in the north of Iran. *Journal of Civil Engineering and Construction* 5 (2), 126-142.
- Sloan, S. D., Nolan, J. J., Broadfoot, S. W., McKenna, J. R., Metheny, O. M., 2013. Using near-surface seismic refraction tomography and multichannel analysis of surface waves to detect shallow tunnels: A feasibility study. *Journal of Applied Geophysics* 99, 60-65.
- Talae Firozjaee, F., Pegah, E., Misaghi, A., 2024. Fabric anisotropy in sands and assessing its dependence on grading and surface appearance parameters. *Kharazmi Journal of Earth Sciences* 10 (1), 73-90.
- Uyanik, O., 2011. The porosity of saturated shallow sediments from seismic compressional and shear wave velocities. *Journal of Applied Geophysics* 73, 16-24.
- Zhu, Y., Gong, J., Nie, Z., 2020. Numerical investigation of the elastic properties of binary mixtures as a function of the size ratio and fines content. *International Journal of Geomechanics* 20 (9), 04020155.

CRediT authorship contribution statement



Ehsan Pegah

Conceptualization, Methodology, Software, Validation, Formal analysis, Investigation, Data Curation, Writing -Original Draft, Project administration



مقاله پژوهشی

دسترسی آزاد

مجله علوم زمین خوارزمی

Journal homepage <https://gnf.khu.ac.ir>

تدوین یک رویکرد عمدتاً نظری برای استنتاج سختی‌های کشسان زهکشی‌شده ناهمسانگرد در خاک‌های دانه‌ای اشباع بر اساس ویژگی‌های زهکشی‌نشده

احسان پگاه^{*۱}

۱. گروه زمین‌شناسی کاربردی، دانشکده علوم زمین، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

| اطلاعات مقاله | چکیده |
|--|--|
| تاریخچه مقاله دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۲۱ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۲۹ | سختی‌های کشسان ناهمسانگرد در رسوبات خاک‌های دانه‌ای نقش مهمی در تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی ژئوتکنیک و زمین‌شناسی مهندسی دارند. در این مطالعه، امکان محاسبه سختی‌های کشسان زهکشی‌شده در خاک‌های دانه‌ای اشباع بر اساس ویژگی‌های زهکشی‌نشده بررسی شد. با فرض ناهمسانگردی متقاطع در خاک‌های دانه‌ای، مجموعه‌ای از معادلات بر مبنای اصول نظریه‌ی کشسانی از پیشینه‌ی تحقیق استخراج شدند که در ترکیب با یک رابطه تجربی توسعه‌داده‌شده در این مطالعه، ارتباط بین پارامترهای زهکشی‌شده و زهکشی‌نشده را بیان می‌کنند. سپس، رویکردی نوین برای محاسبه مدول‌های یانگ زهکشی‌شده ناهمسانگرد از دو مؤلفه‌ی ناهمسانگرد مدول برشی و مؤلفه‌ی قائم مدول یانگ در شرایط زهکشی‌نشده ارائه شد. برای ارزیابی دقت و اعتبار این رویکرد، داده‌های مربوط به ویژگی‌های کشسان ناهمسانگرد حاصل از ۴۶ آزمون آزمایشگاهی روی ۷ نمونه خاک دانه‌ای متفاوت متعلق به ۳ نوع خاک از مکان‌های مختلف جهان، از پیشینه گردآوری شد. مدول‌های یانگ زهکشی‌شده ناهمسانگرد برای هر آزمون با روش پیشنهادی محاسبه و با مقادیر مستقیماً اندازه‌گیری‌شده مقایسه شدند. نتایج نشان‌دهنده‌ی توافق مطلوب بین مقادیر محاسبه‌شده و مقادیر واقعی بود. یافته‌های این مطالعه می‌تواند به عنوان مرجعی مناسب برای توصیف منطقی و مقرون‌به‌صرفه‌ی سختی‌های کشسان ناهمسانگرد در رسوبات خاک‌های دانه‌ای اشباع با بهره‌گیری از تکنیک‌های غیرمخرب لرزه‌ای به کار گرفته شوند. |
| واژه‌های کلیدی خاک‌های دانه‌ای اشباع، ناهمسانگردی متقاطع، سختی کشسان زهکشی‌شده، سرعت امواج لرزه‌ای، روش‌های غیرمخرب لرزه‌ای. | |



مقدمه

بسته به وضعیت زهکشی در یک توده خاک اشباع، به‌طور کلی سختی‌های کشسان به دو مجموعه‌ی مجزا تقسیم می‌شوند: مدول‌های زهکشی‌نشده (سختی تنش کل) و مدول‌های زهکشی‌شده (سختی تنش موثر) (Clayton, 2011). در خاک‌های دانه‌ای، با توجه به مقادیر بالای ضریب هدایت هیدرولیکی، فرآیند زهکشی معمولاً بسیار سریع تکمیل می‌شود (Das and Sobhan, 2014). بنابراین، پارامترهای زهکشی‌شده اهمیت بالایی دارند و می‌توان آن‌ها را از آزمون‌های آزمایشگاهی متداول استاتیکی و/یا دینامیکی سه‌محوری یا

توصیف دقیق ویژگی‌های کشسان در خاک‌های دانه‌ای یکی از مهمترین موضوعات در مکانیک خاک و مهندسی ژئوتکنیک است. مقادیر سختی‌های کشسان در کرنش‌های کوچک نقش اساسی در تحلیل بسیاری از مسائل ژئوتکنیکی و زمین‌شناسی مهندسی دارند (Anhdan and Koseki, 2005; Gu and Yang, 2018; He et al., 2017; Pegah et al., 2022; Pegah and Liu, 2025; Talaei Firozjaee et al., 2024; Zhu et al., 2020).

DOI <http://doi.org/10.22034/KJES.2025.11.2.107023>*نویسنده مسئول: احسان پگاه e.pegah@khu.ac.ir

استناد به این مقاله: پگاه، ا. (۱۴۰۴). تدوین یک رویکرد عمدتاً نظری برای استنتاج سختی‌های کشسان زهکشی‌شده ناهمسانگرد در خاک‌های دانه‌ای اشباع بر اساس ویژگی‌های زهکشی‌نشده. مجله علوم زمین خوارزمی. جلد ۱۱، شماره ۲، صفحه ۳۶۶ تا ۳۹۴. <http://doi.org/10.22034/KJES.2025.11.2.107023>



پارامترهای کشسان زهکشی‌نشده و در نهایت مدول‌های زهکشی‌شده تعیین شوند. رویکردهای لرزه‌ای غیرمخرب تکنیک‌های کارآمدی هستند که می‌توانند نتایج دقیقی تحت شرایط طبیعی برجا فراهم آورند (Foti et al., 2015; Pegah and Liu, 2016, 2020a, 2020b; Pegah et al., 2016; Sloan et al., 2013; Uyanik, 2011).

در این مطالعه، با فرض ناهمسانگردی متقاطع در رسوبات خاک دانه‌ای اشباع، معادلات نظری کشسانی با سه رابطه‌ی کلیدی ترکیب شدند: (۱) معادله‌ی نظری لینگز (Lings, 2001) که مدول یانگ قائم زهکشی‌نشده را بر حسب پارامترهای کشسان زهکشی‌شده ارائه می‌دهد؛ (۲) نامعادله خطی نظری چودوری و کینگ (Chowdhury and King, 1971, 1972) که ارتباط بین نسبت‌های پواسون ناهمسانگرد را بر حسب نسبت مدول‌های یانگ ناهمسانگرد تحت شرایط زهکشی‌شده توصیف می‌کند؛ و (۳) یک رابطه‌ی تجربی توسعه‌یافته در این مطالعه که نسبت مدول‌های یانگ ناهمسانگرد زهکشی‌شده را بر حسب نسبت مدول‌های برشی متناظر بیان می‌نماید. ترکیب این مجموعه معادلات و رابطه‌ی تجربی امکان محاسبه‌ی E'_h و E'_v را برای یک توده خاک دانه‌ای ناهمسانگرد متقاطع اشباع فراهم می‌سازد. در نهایت، ویژگی‌های کشسان ناهمسانگرد به‌دست‌آمده از ۴۶ آزمون آزمایشگاهی بر روی نمونه‌های متنوع خاک دانه‌ای مربوط به ۳ نوع خاک مختلف از کشورهای گوناگون از پیشینه تحقیق گردآوری شدند تا دقت و اعتبار روش پیشنهادی مورد سنجش قرار گیرد.

چارچوب رویکرد پیشنهادی

کشسانی ناهمسانگرد متقاطع

فرضیه‌ی ناهمسانگردی متقاطع در رسوبات طبیعی خاک، یک فرضیه‌ی معتبر است که به‌طور گسترده در عمل برای توصیف بسیاری از ویژگی‌های ژئوتکنیکی به‌کار گرفته شده است (Clayton,

Das and Ramana, 2011; Ezaoui and Di Benedetto, 2009; Fioravante et al., 2013; Hoque and Tatsuoka, 2004; Kumar and Madhusudhan, 2010).

تعیین دقیق پارامترهای کشسان زهکشی‌شده از روش‌های آزمایشگاهی از نظر فنی به دلیل عواملی چون ناپایداری حسگرهای کرنش نصب‌شده اطراف نمونه، جفت‌شدگی مبدل‌ها، خطای کالیبراسیون، تغییرشکل‌پذیری غیریکنواخت نمونه و تعیین دقیق زمان‌های رسید امواج P و S در آزمون‌های المان خمشی یا کششی چالش‌برانگیز است (Gu et al., 2015; Kuwano and Jardine, 2014; Nishimura 2014; Khan et al., 2011). علاوه بر این، دیگر پیامدهای منفی حاصل از حفاری، شامل آسیب ساختارباختی طبیعی خاک، اثرات زیست‌محیطی و هزینه‌های مالی، از مسائل بحرانی آزمون‌های آزمایشگاهی به‌شمار می‌روند.

بنابراین، هدف اصلی این مطالعه ارائه تکنیکی نوین برای محاسبه دو مدول یانگ زهکشی‌شده ناهمسانگرد متقاطع (E'_h و E'_v) از ویژگی‌های زهکشی‌نشده است، که می‌توان آن‌ها را بر اساس سرعت‌های لرزه‌ای امواج P و S محاسبه کرد. این سرعت‌ها می‌توانند از طریق پیمایش‌های لرزه‌ای مخرب یا غیرمخرب برجا اندازه‌گیری شوند، اگرچه گزینه غیرمخرب به دلیل سازگاری با محیط زیست و هزینه کمتر، محبوب‌تر است. آزمون‌های لرزه‌نگاری انکساری غیرمخرب امکان تعیین پروفیل سرعت زیرسطحی را به‌سادگی در محل رسوبات خاک اشباع فراهم می‌کنند، بدون آنکه نیاز به حفر گمانه یا نمونه‌برداری خاک باشد. مدل‌های حاصل، توزیع سرعت لرزه‌ای امواج P و S زهکشی‌نشده را در سرتاسر محیط زیرسطحی برای لایه‌های مختلف نشان می‌دهند. در واقع، انتشار امواج لرزه‌ای در یک محیط خاک دانه‌ای اشباع باعث می‌شود که به دلیل اعمال آنی تنش‌ها در بازه زمانی بسیار کوتاه، سرعت‌ها تحت شرایط زهکشی‌نشده اندازه‌گیری شوند. این مقادیر سرعت سپس در معادلات ناشی از نظریه کشسانی ناهمسانگرد متقاطع پیاده‌سازی می‌شوند تا

همچنین، پگاه و همکاران (Pegah et al., 2021) نشان دادند که سه پارامتر کشسان مستقل در شرایط زهکشی نشده را می‌توان با اطمینان، بر اساس سرعت‌های امواج PH، SV، و SH به دست آمده از پیمایش‌های انکساری لرزه‌ای غیرمخرب، تعیین کرد (معادلات (۶) تا (۸)):

$$E_v^u = \rho V_{SH}^2 [3 - 4(V_{SH}/V_{PH})^2] \quad (۶)$$

$$E_h^u = \rho [(3V_{PH}^2 - 4V_{SH}^2) / ((V_{PH}/V_{SH})^2 - 1)] \quad (۷)$$

و

$$G_{vh}^u = \rho V_{SV}^2. \quad (۸)$$

در این روابط:

- V_{PH} سرعت موج P در راستای افقی لایه‌های خاک است که می‌توان آن را در عملیات صحرایی به وسیله تکنیک توموگرافی انکساری لرزه‌ای (Seismic Refraction Tomography یا SRT) اندازه‌گیری کرد.

- V_{SV} سرعت موج S در صفحه قائم است که از طریق روش تحلیل چندکاناله امواج سطحی ریلی (Multichannel Analysis of Surface Rayleigh Waves یا MASW) استخراج می‌شود.

- V_{SH} سرعت موج S در صفحه افقی است که می‌توان آن را به کمک روش تحلیل چندکاناله امواج لَو (Multichannel Analysis of Love Waves یا MALW) تعیین کرد.

- ρ نیز چگالی ظاهری خاک است. سرعت‌های V_{SH} و V_{SV} را می‌توان با به‌کارگیری روش‌های MASW و MALW بر روی داده‌های لرزه‌ای صحرایی به دست آورد. برای این منظور، یک پیمایش لرزه‌نگاری انکساری از طریق آرایه‌ای خطی از ژئوفون‌ها — شامل ژئوفون‌های سه‌مولفه‌ای یا ترکیبی از ژئوفون‌های قائم و افقی — اجرا می‌شود. تولید امواج توسط

2011; Dutta et al., 2020; Fioravante, 2000; Gu et al., 2017; Pegah et al., 2017, 2024).

بسته به شرایط زهکشی در یک محیط خاک دانه‌ای ناهمسانگرد متقاطع اشباع، به‌طور کلی ویژگی‌های کشسان به دو دسته‌ی متفاوت شامل پارامترهای زهکشی‌شده و زهکشی‌نشده طبقه‌بندی می‌شوند. برای شرایط زهکشی‌نشده، ویژگی‌های کشسان شامل هفت پارامتر مختلف بر اساس نظریه‌ی کشسانی ناهمسانگرد متقاطع هستند: E_v^u و E_h^u که به ترتیب مدول‌های یانگ زهکشی‌نشده در جهات قائم و افقی‌اند؛ v_{vh}^u ، v_{hv}^u و v_{hh}^u که بیانگر نسبت‌های پواسون زهکشی‌نشده به صورت v_{ij}^u هستند به طوری که کرنش ایجاد شده در جهت j ناشی از کرنش تحمیل شده در جهت i تعریف می‌شود؛ و G_{vh}^u (یا G_{hv}^u) و G_{hh}^u که به ترتیب مدول‌های برشی در صفحات قائم و افقی‌اند. این هفت پارامتر کشسان بر اساس معادلات (۱) تا (۳) از نظریه‌ی کشسانی با یکدیگر در ارتباط‌اند، به گونه‌ای که در عمل تنها پنج پارامتر، مستقل به‌شمار می‌آیند (Clayton, 2011; Pegah et al., 2021, 2022):

$$G_{vh}^u = G_{hv}^u, \quad (۱)$$

$$v_{vh}^u/E_v^u = v_{hv}^u/E_h^u, \quad (۲)$$

و

$$G_{hh}^u = E_h^u / [2(1 + v_{hh}^u)]. \quad (۳)$$

علاوه بر این، بر اساس مطالعات تحلیلی انجام شده توسط گیبسون (Gibson, 1974)، دو نسبت پواسون v_{hh}^u و v_{hv}^u همچنین با نسبت E_h^u/E_v^u همانطور که در معادلات (۴) و (۵) نشان داده شده است، در ارتباط‌اند و در نهایت توصیف یک محیط ناهمسانگرد متقاطع را تنها با سه پارامتر مستقل E_v^u ، E_h^u و G_{vh}^u ممکن می‌سازد (Lings, 2001):

$$v_{hv}^u = 1/2 (E_h^u/E_v^u), \quad (۴)$$

$$v_{hh}^u = 1 - 1/2 (E_h^u/E_v^u). \quad (۵)$$

می‌شوند؛ به‌گونه‌ای که در نهایت پنج پارامتر مستقل باقی می‌مانند که شامل E'_v ، ν'_{vh} (یا ν'_{hv})، G'_{vh} ، و دو پارامتر از میان E'_h ، G'_{hh} ، و ν'_{hh} هستند (Clayton, 2011; Pegah et al., 2022).

معادلات ربط‌دهنده‌ی سختی‌های کشسان زهکشی‌نشده

به ویژگی‌های زهکشی‌شده

لینگز (Lings, 2001) و نیشیمورا (Nishimura, 2014) نشان دادند که سختی کشسان زهکشی‌نشده E_v^u در یک توده‌ی خاک ناهمسانگرد متقاطع، به صورت تابعی از پارامترهای کشسان زهکشی‌شده E'_v ، E'_h ، ν'_{hh} ، و ν'_{vh} بیان می‌شود:

$$E_v^u = E'_v [2(1 - \nu'_{hh})E'_v + (1 - 4\nu'_{vh})E'_h] / [2(1 - \nu'_{hh})E'_v - 4(\nu'_{vh})^2 E'_h] \quad (9)$$

آن‌ها همچنین گزارش کرده‌اند که سختی‌های برشی G'_{hh} و G'_{vh} عملاً مستقل از شرایط زهکشی بوده و با مقادیر متناظر در حالت زهکشی‌نشده برابر هستند:

$$G'_{vh} = G'_{vh} \quad (10)$$

$$G'_{hh} = G'_{hh} \quad (11)$$

محاسبه‌ی سختی‌های کشسان E'_h و E'_v

بر اساس معادلات (10) و (11)، مقادیر G'_{hh} و G'_{vh} را می‌توان به‌سادگی از مقادیر زهکشی‌نشده‌ی متناظر به‌دست آورد. با این حال، تعیین سه پارامتر مستقل دیگر، یعنی E'_h ، E'_v (یا ν'_{hh}) و ν'_{vh} (یا ν'_{hv})، از ویژگی‌های زهکشی‌نشده به این سادگی امکان‌پذیر نیست. از این‌رو، در این مطالعه یک رویکرد عمدتاً نظری برای ارزیابی کمی این پارامترها بر اساس معادله (9) پیشنهاد شده است.

نسبت پواسون ν'_{hh} را می‌توان بر اساس معادله (3) برای حالت زهکشی‌شده به صورت $\nu'_{hh} = (E'_h / 2G'_{hh}) - 1$ بازنویسی کرد. با جایگذاری سمت راست این معادله به جای ν'_{hh} در معادله (9)، مقدار

ضربه‌های گذرا مانند ضربه پتک یا انفجار دینامیت صورت می‌گیرد. این ضربه‌ها انواع گوناگونی از امواج لرزه‌ای شامل امواج P و ریلی، و همچنین امواج S و لاو را ایجاد می‌کنند که به‌ترتیب در دسته‌شده‌های P و S ثابت می‌گردند. در ادامه، با تحلیل رفتار پاشندگی امواج ریلی و لاو در چارچوب تکنیک‌های MASW و MALW، پروفیل‌های سرعت V_{SH} و V_{SV} استخراج می‌شوند.

امواج ریلی معمولاً به‌صورت سیگنال‌هایی با دامنه زیاد در دسته‌شده‌های P ظاهر می‌شوند و به‌دلیل پاشنده‌بودن، شامل مؤلفه‌های فرکانسی مختلفی هستند که هر یک با سرعت فاز ویژه خود در محیط انتشار می‌یابند. از آنجا که طول‌موج‌های مختلف به اعماق متفاوتی نفوذ می‌کنند، منحنی پاشندگی این امواج اطلاعات دقیقی درباره تغییرات عمقی V_{SV} فراهم می‌کند. امواج لاو نیز پاشنده بوده و معمولاً با دامنه‌های بالا در دسته‌شده‌های S مشاهده می‌شوند. در روش‌های MASW و MALW ابتدا دسته‌شده‌ها به تصاویر پاشندگی تبدیل شده و سپس دو تصویر برتر که وضوح و پیوستگی بیشتری در نمایش پاشش مود اصلی امواج ریلی و لاو دارند، انتخاب می‌شوند. منحنی پاشندگی مود اصلی امواج ریلی و لاو با دنبال کردن بیشترین دامنه‌ها در نواحی انرژی غالب استخراج شده و سپس معکوس‌سازی می‌شود تا پروفیل‌های سرعت V_{SH} و V_{SV} به‌دست آیند. کاربرد گسترده و اعتبار روش‌های MASW و MALW در استخراج سرعت‌های لرزه‌ای معتبر و قابل اعتماد، در مطالعات متعددی گزارش شده است (Ivanov et al., 2017; Pegah and Liu, 2020b; Xia, 2014).

تعداد کل پارامترهای کشسان ناهمسانگرد متقاطع در شرایط زهکشی‌شده اساساً مشابه شرایط زهکشی‌نشده است. تنها تفاوت در آن است که پارامترهای زهکشی‌شده با نمادگذاری متناظر با تنش موثر نمایش داده می‌شوند (E'_v ، E'_h ، ν'_{vh} ، ν'_{hv} ، ν'_{hh} ، G'_{vh} (یا G'_{hv})، و G'_{hh}). علاوه بر این، روابط بین این پارامترها صرفاً به‌صورت تبدیل‌یافته‌ی معادلات (1) تا (3) برای شرایط زهکشی‌شده بیان

در شرایط مختلف تنش و در محدوده‌ی کرنش‌های بسیار کوچک (در حدود 10^{-6}) انجام شدند تا اطمینان حاصل شود که رفتار خاک به‌طور کامل کشسان باقی بماند. لازم به ذکر است که فرآیند شمارش تعداد انواع خاک در این مطالعه بر مبنای منشأ و خاستگاه آن‌ها انجام گرفته است. به این ترتیب، خاک‌هایی که در مطالعات مختلف با نام، منشأ یا خاستگاه یکسان گزارش شده‌اند، تنها یک‌بار شمارش شده‌اند، هرچند ممکن است ویژگی‌های فیزیکی متفاوتی داشته باشند. جدول ۱ در پیوست الف، مقادیر مدول‌های ناهمسانگرد را همراه با سایر اطلاعات تکمیلی نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود، در ستون‌های نهم و دهم این جدول، نسبت‌های E'_h/E'_v و G'_{hh}/G'_{vh} برای تمامی ۲۶ نمونه خاک محاسبه و ارائه شده‌اند. انحراف این نسبت‌ها از مقدار واحد نشان می‌دهد که مدول‌های یانگ و برشی، به ترتیب، در راستاها و صفحات قائم و افقی برابر نیستند و بنابراین وجود ناهمسانگردی در رفتار کشسان نمونه‌ها تأیید می‌شود. این یافته با فرض ناهمسانگردی متقاطع در محیط خاک که در این مطالعه اتخاذ شده است، سازگار می‌باشد.

در ادامه، به منظور استخراج رابطه‌ی بالقوه بین نسبت‌های E'_h/E'_v و G'_{hh}/G'_{vh} ، مقادیر این نسبت‌ها در برابر هم ترسیم شدند (شکل ۱). سپس با استفاده از تحلیل رگرسیون و برازش بهترین خط در مقیاس لگاریتمی، رابطه‌ی نهایی همبسته‌کننده بین این نسبت‌ها به دست آمد:

$$E'_h/E'_v = (G'_{hh}/G'_{vh})^{1.8}; R^2 = 0.90, N = 212 \quad (14)$$

در این رابطه، R^2 ضریب تعیین و N تعداد داده‌های به کاررفته در فرآیند برازش است. مقدار بالای ضریب R^2 بیانگر وجود یک همبستگی قوی بین نسبت‌های ناهمسانگرد می‌باشد که فرضیه‌ی گراهام و هولسبی (Graham and Houlby, 1983) مبنی بر وجود ارتباط توانی میان این نسبت‌ها را تأیید می‌کند. با این حال، توان به دست‌آمده (۱/۸) با توان فرضی در رابطه (۱۳) متفاوت است. با توجه به این که رابطه (۱۴) بر اساس پایگاه‌داده‌ای جامع از نتایج

E_v^u به صورت تابعی از پارامترهای E'_h, E'_v, ν'_{vh} و G'_{hh} بیان می‌شود:

$$E_v^u = E'_v[(4 - E'_h/G'_{hh})E'_v + (1 - 4\nu'_{vh})E'_h]/[(4 - E'_h/G'_{hh})E'_v - 4(\nu'_{vh})^2E'_h] \quad (12)$$

از سوی دیگر، بر اساس مدل کشسانی ناهمسانگرد متقاطع سه پارامتری گراهام و هولسبی (Graham and Houlby, 1983)، مدول یانگ E'_h را می‌توان به صورت یک تابع درجه دو از نسبت مدول‌های برشی ناهمسانگرد G'_{hh} و G'_{vh} بیان کرد:

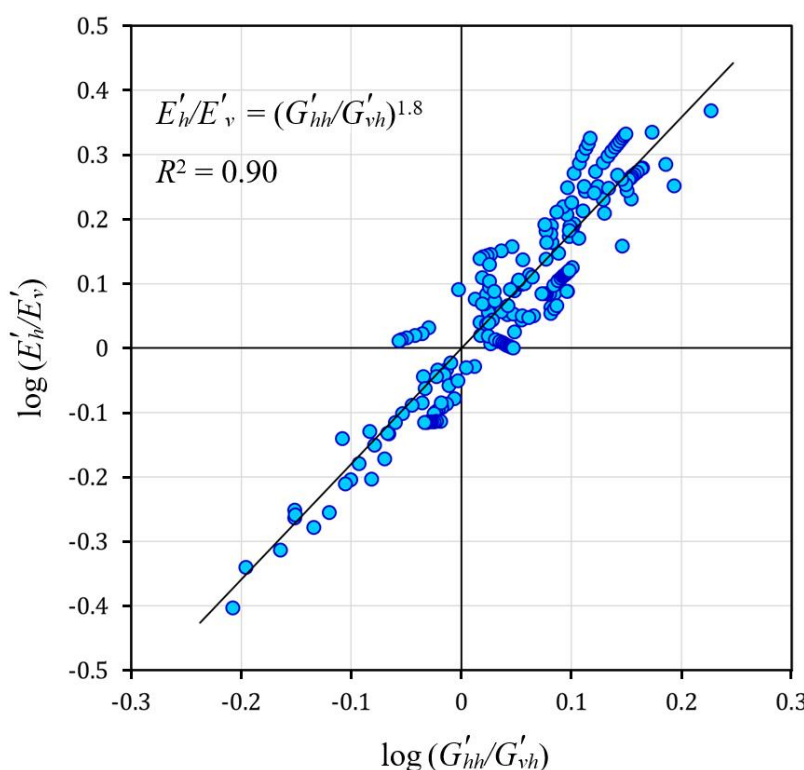
$$E'_h = E'_v(G'_{hh}/G'_{vh})^2 \quad (13)$$

این رابطه تنها در قالب یک فرض ریاضیاتی برای ساده‌سازی مسیر دستیابی به پارامترهای مستقل کشسان معرفی شد، بدون آن که تلاش سیستماتیکی برای اعتبارسنجی تجربی آن انجام شده باشد. تنها در یک مطالعه‌ی کاربردی و واقع‌بینانه، پگاه و همکاران (Pegah et al., 2022) با ایجاد یک پایگاه‌داده نسبتاً جامع از نسبت‌های E'_h/E'_v و G'_{hh}/G'_{vh} حاصل از ۱۹۰ آزمون آزمایشگاهی و عددی روی طیفی از خاک‌های دانه‌ای، و سپس ترسیم E'_h/E'_v بر حسب G'_{hh}/G'_{vh} ، کفایت معادله (۱۳) را در کاربردهای عملی به‌طور کلی تأیید کردند.

در این مطالعه، پایگاه‌داده پگاه و همکاران (Pegah et al., 2022) با افزودن مجموعه‌داده‌های بیشتر از ویژگی‌های کشسانی مرتبط با ۲۲ آزمون دیگر تکمیل شد تا یک پایگاه‌داده جامع از نسبت‌های E'_h/E'_v و G'_{hh}/G'_{vh} در خاک‌های دانه‌ای تدوین شود. پایگاه‌داده جدید شامل مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی مدول‌های $E'_h, E'_v, G'_{hh}, G'_{vh}$ و نسبت‌های حاصل برای E'_h/E'_v و G'_{hh}/G'_{vh} بودند که از ۲۱۲ آزمون آزمایشگاهی و مطالعات عددی مبتنی بر روش ایمان گسسته روی ۲۶ نمونه خاک مختلف متعلق به ۷ خاک دانه‌ای استخراج شدند (Bellotti et al., 1996; Dutta et al., 2020; Ezaoui and Di Benedetto, 2009; Fioravante, 2000; Fioravante et al., 2013; Gu et al., 2017). تمامی این آزمون‌ها

اثر می‌گذارد. به‌طور خاص، زمانی که نسبت G'_{hh}/G'_{vh} کمتر از یک باشد، اعمال توان $1/8$ موجب می‌شود که نسبت متناظر E'_h/E'_v با شدتی کمتر از تغییرات نسبت برشی تغییر کند. در مقابل، اگر نسبت G'_{hh}/G'_{vh} بزرگ‌تر از یک باشد، اعمال این توان سبب تشدید اثرگذاری ناهمسانگردی برشی شده و نسبت E'_h/E'_v با شدت بیشتری رشد خواهد کرد. بنابراین، توان $1/8$ نقش تعیین‌کننده‌ای در توصیف حساسیت ناهمسانگردی سختی کشسان نسبت به تغییرات سختی برشی ایفا می‌کند.

آزمایشگاهی واقعی استنتاج شده است، جایگزینی آن با معادله (۱۳) در مطالعات خاک‌های دانه‌ای - همانند آنچه در این مطالعه انجام می‌شود - برای دستیابی به نتایج قابل‌اعتمادتر ضروری است. رابطه (۱۴) نشان‌دهنده‌ی آن است که نسبت ناهمسانگردی مدول‌های یانگ به صورت تابع توانی از نسبت ناهمسانگردی مدول‌های برشی عمل می‌کند. مقدار توان ($1/8$) بیانگر شدت وابستگی این دو نسبت بوده و از دیدگاه فیزیکی نشان‌دهنده‌ی آن است که تغییرات در ناهمسانگردی سختی برشی چگونه بر ناهمسانگردی سختی کشسان



شکل ۱- برازش منحنی بر نسبت مدول‌های یانگ ناهمسانگرد (E'_h/E'_v) برحسب نسبت مدول‌های برشی ناهمسانگرد (G'_{hh}/G'_{vh})، بر اساس نتایج ۲۱۲ آزمون آزمایشگاهی و عددی انجام‌شده بر روی مجموعه‌ای از خاک‌های دانه‌ای، در مقیاس لگاریتمی

Fig. 1. Curve fitting of the anisotropic Young's moduli ratio (E'_h/E'_v) versus the anisotropic shear moduli ratio (G'_{hh}/G'_{vh}), based on the results of 212 experimental and numerical tests conducted on various granular soils, plotted on a logarithmic scale

$$E_v'^2 - [E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4\nu_{vh}')G_{hh}^u]E_v' +$$

$$4E_v^u[(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) - \nu_{vh}'^2 G_{hh}^u] = 0 \quad (15)$$

عبارت Δ برای معادله (۱۵) می‌تواند به صورت زیر بیان شود که همواره مثبت خواهد بود (چنان‌که در پیوست ب اثبات شده است):

$$\Delta = [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4\nu_{vh}')G_{hh}^u]^2$$

با جایگذاری معادلات (۱۰)، (۱۱)، و (۱۴) در معادله (۱۲)، یک

معادله درجه دوم بر حسب E_v' با ضرایبی منحصر به فرد - که به صورت تابعی از سه ویژگی زهکشی‌نشده E_v^u ، G_{vh}^u و G_{hh}^u ، و نسبت پواسون زهکشی‌شده ν_{vh}' هستند - به دست می‌آید که به شکل زیر است:

(۱۹) را می‌توان به‌عنوان کران بالایی برای نسبت پواسون ν'_{hh} در نظر گرفت. با جایگذاری عبارت $\nu'_{hh} = (E'_h/2G'_{hh}) - 1$ برای ν'_{hh} در معادله (۱۹) و ترکیب آن با معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۴)، در نهایت معادله (۱۹) را می‌توان به صورت زیر بازآرایی نمود:

$$E'_v < (4G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) - 2G_{hh}^u \nu'_{vh} \quad (20)$$

این نامعادله بیان می‌کند که مقدار E'_v می‌تواند به صورت حدی به مقدار عبارت سمت راست میل کند ($E'_v \rightarrow$ $[(4G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) - 2G_{hh}^u \nu'_{vh}]$) و بسیار به آن نزدیک شود. بنابراین، عبارت سمت راست معادله (۲۰) را می‌توان به‌عنوان کران بالایی (حد نظری) که E'_v می‌تواند پیش از نقض نامعادله اتخاذ کند، در نظر گرفت. بر این اساس، با فرض این کران بالایی به‌عنوان مقدار نظری بیشینه برای E'_v می‌توان علاوه بر معادله (۱۸) یک رابطه‌ی مرزی دیگر (معادله (۲۱)) به دست آورد که E'_v را بر حسب پارامترهای E'_v ، G_{vh}^u ، G_{hh}^u و ν'_{vh} بیان می‌نماید. حل دستگاه متشکل از معادلات (۱۸) و (۲۱) سپس امکان تعیین مقادیر نظری را فراهم می‌آورد؛ با این حال لازم است ریشه‌های به دست آمده از نظر سازگاری فیزیکی (مثلاً $E'_v > 0$ و دامنه منطقی ν'_{vh}) بررسی شوند.

$$E'_v = (4G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) - 2G_{hh}^u \nu'_{vh} \quad (21)$$

ترکیب معادلات (۱۸) و (۲۱) یک دستگاه دو معادله و دو مجهول (ν'_{vh} و E'_v) را تشکیل می‌دهد. با برابر قرار دادن طرفین راست این دو معادله و سپس مرتب‌سازی جملات، یک معادله‌ی درجه دوم بر حسب ν'_{vh} حاصل می‌شود:

$$\nu'_{vh}{}^2 - 1/2 [1 + (4G_{vh}^{u\ 1.8}/(G_{hh}^{u\ 1.8} + G_{hh}^{u\ 0.8} E'_v))] \nu'_{vh} + G_{vh}^{u\ 1.8}/(G_{hh}^{u\ 1.8} + G_{hh}^{u\ 0.8} E'_v) = 0 \quad (22)$$

از آنجا که برای این معادله داریم $\Delta = 4[G_{hh}^u - (4G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + E'_v] > 0$ بنابراین این معادله دارای دو ریشه ممکن به صورت زیر خواهد بود:

$$\nu'_{vh} = 0.5 \quad (23)$$

$$+4G_{hh}^u E'_v (1 - 2\nu'_{vh})^2 \quad (16)$$

از آنجا که $\Delta > 0$ بنابراین معادله (۱۵) دو ریشه حقیقی خواهد داشت:

$$E'_v = 1/2 \left[\frac{E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})}{+(1 - 4\nu'_{vh})G_{hh}^u + \sqrt{\Delta}} \right] \quad (17)$$

و ریشه دوم:

$$E'_v = 1/2 \left[\frac{E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})}{+(1 - 4\nu'_{vh})G_{hh}^u - \sqrt{\Delta}} \right] \quad (18)$$

با این حال، تنها یکی از این دو ریشه نمایانگر مقدار واقعی E'_v است. بدیهی است که آب موجود در حفرات یک توده خاک اشباع عملاً تراکم‌ناپذیر است. این موضوع باعث می‌شود که همواره مدول یانگ زهکشی‌شده کوچکتر از مدول یانگ زهکشی‌نشده باشد؛ یعنی باید $E'_v < E_v^u$ (Clayton, 2011; Pegah et al., 2021, 2022). با این وجود، همان‌گونه که در پیوست ج نشان داده شده است، مقدار حاصل از معادله (۱۷) منجر به $E'_v > E_v^u$ خواهد شد. بر این اساس، این ریشه از روند تحلیل کنار گذاشته شده و ریشه حاصل از معادله (۱۸) که با شرط فوق سازگار است (به پیوست ج مراجعه کنید) به‌عنوان مقدار معتبر E'_v در نظر گرفته می‌شود.

از سوی دیگر، لینگز (Lings, 2001) گزارش داد که علاوه بر محدودیت‌های صرفاً ترمودینامیکی که موجب اعمال قیودی بر مقادیر پارامترهای کشسان زهکشی‌شده یا ترکیبات آن‌ها می‌شود، می‌توان از منظر فیزیکی حدود معین دیگری نیز برای این پارامترها در نظر گرفت. او گزارش داد که مادامی که تمامی تنش‌های اصلی اعمال شده بر یک توده خاک کشسان دارای علامت یکسانی باشند، این توده خاک نباید تحت بارگذاری فشاری دچار اتساع شود؛ این امر منجر به برقرار بودن شرط لازم زیر خواهد شد (Chowdhury and King, 1971, 1972):

$$\nu'_{hh} < 1 - (E'_h/E'_v)\nu'_{vh} \quad (19)$$

این شرط بیان می‌کند که تا زمانی که یک توده خاک دارای رفتار غیراتساعی باشد، عبارت $1 - (E'_h/E'_v)\nu'_{vh}$ در سمت راست معادله

و ریشه دوم:

در ادامه، با جایگذاری معادله (۲۴) به جای v'_{vh} در معادله (۱۸) یا(۲۱)، مقدار E'_v به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E'_v = (4E_v^u G_{vh}^u)^{1.8} / [G_{hh}^u]^{0.8} (G_{hh}^u + E_v^u) \quad (25)$$

در نهایت، با قرار دادن مقدار E'_v محاسبه‌شده از رابطه (۲۵) درمعادله (۱۴) می‌توان E'_h را نیز محاسبه نمود. شکل ۲ فرآیند محاسبهمدول‌های زهکشی‌شده E'_v و E'_h در خاک‌های دانه‌ای اشباع ازپارامترهای زهکشی‌نشده E_v^u ، G_{vh}^u و G_{hh}^u بر اساس رویکرد

پیشنهادی در این مطالعه را به صورت گام‌به‌گام در قالب یک روندنما

نشان می‌دهد.

$$v'_{vh} = 2 G_{vh}^u]^{1.8} / [G_{hh}^u]^{0.8} (G_{hh}^u + E_v^u) \quad (24)$$

بر مبنای مطالعات چادوری و کینگ (Chowdhury and King, 1971, 1972)،

مادامی که تنش‌های وارده بر خاک از حد کشسانی

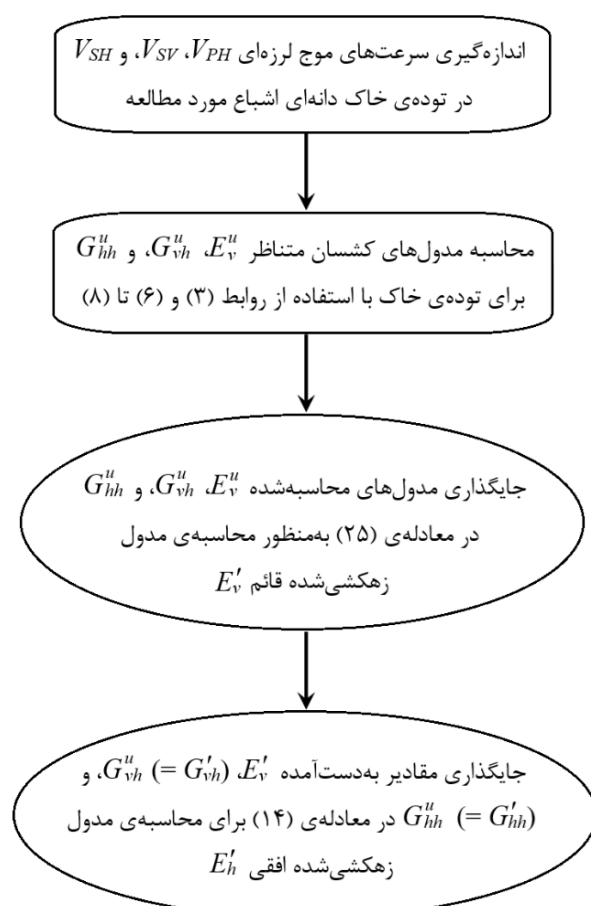
تجاوز نکند به گونه‌ای که تغییر شکل پذیری خاک وارد مرحله اتساع

نشود، مقدار نسبت پواسون v'_{vh} همواره کمتر از ۰/۵ خواهد بود، بنابراین، $(v'_{vh} < 0.5)$ (Lings, 2001; Pegah et al., 2021).

مقدار بیان‌شده توسط رابطه (۲۳) از درجه اعتبار ساقط بوده و تنها

مقدار حاصل از رابطه (۲۴) بیانگر مقدار واقعی ممکن برای v'_{vh}

خواهد بود.



شکل ۲- روندنمای استخراج مدول‌های یانگ زهکشی‌شده ناهمسانگرد (E'_h و E'_v) در خاک‌های دانه‌ای اشباع بر اساس رویکرد توسعه‌یافته در این مطالعه
 Fig. 2. Flowchart illustrating the derivation of anisotropic drained Young's moduli (E'_v and E'_h) in saturated granular soils based on the developed approach in this study

کاربست رویکرد پیشنهادی در خاک‌های ماسه‌ای تدوین پایگاه‌داده‌ای از پارامترهای کشسان ناهمسانگرد متقاطع در خاک‌های ماسه‌ای

به منظور ارزیابی دقت و کارایی رویکرد نظری ارائه شده در بخش پیشین، مجموعه‌ای از پارامترهای کشسان ناهمسانگرد متقاطع مربوط به ۷ نمونه از خاک‌های ماسه‌ای مختلف، شامل ۳ نوع ماسه گوناگون، از داده‌های آزمایشگاهی گزارش شده توسط کووانو (Kuwano, 1999) و کووانو و جاردین (Kuwano and Jardine, 2002) استخراج گردید. نمونه‌های مورد آزمایش شامل ماسه‌های بازسازی شده با ویژگی‌های فیزیکی متفاوت بودند که تحت تنش‌های فشاری و کششی مورد بررسی قرار گرفتند. نمونه‌ها با استفاده از روش بارش خشک در هوا و کوبش ضربه‌ای بر دیواره قالب آماده شدند و سپس با اعمال فشار برگشتی کافی، به طور کامل اشباع شدند. در ادامه، نمونه‌ها در مجموعه‌ای از دستگاه‌های سه‌محوری پیشرفته مجهز به حسگرهای دقیق اندازه‌گیری تغییرشکل و سامانه ثبت امواج برشی قرار داده شدند تا ویژگی‌های کشسان زهکشی شده و زهکشی نشده آن‌ها در سطوح مختلفی از فشارمحفظه‌ای موثر (σ'_c) در بازه‌ی ۴۰ تا ۴۰۰ کیلوپاسکال اندازه‌گیری شود. پارامترهای E'_v ، E''_v و E'_h از اندازه‌گیری‌های کرنش‌های محوری و شعاعی تحت بارگذاری‌های تناوبی در دو جهت محوری و شعاعی، طی مجموعه‌ای از حالت‌های تنش اولیه همسانگرد و ناهمسانگرد، به طور مستقیم محاسبه گردیدند. افزون بر این، مدول‌های برشی G'_{vh} و G'_{hh} با استفاده از اندازه‌گیری سرعت موج برشی جهت‌دار از طریق المان‌های خمشی نصب شده در جهات قائم و افقی به دست آمدند. در مجموع، داده‌های مربوط به پارامترهای کشسان ناهمسانگرد از ۴۶ آزمون آزمایشگاهی انجام شده بر روی ۴ نمونه خاک ماسه‌ای طبیعی و ۳ نمونه خاک ماسه‌ای مصنوعی گردآوری شدند. اطلاعات تکمیلی مربوط به تمامی نمونه‌های آزمایش شده در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲- پایگاه داده تدوین شده از مقادیر پارامترهای کشسان ناهمسانگرد مربوط به ۷ نمونه مختلف از ۳ نوع خاک ماسه‌ای، اندازه‌گیری شده به صورت آزمایشگاهی توسط کووانو (Kuwano, 1999) و کووانو و جاردین (Kuwano and Jardine, 2002)، همراه با شرایط تنش حین آزمایش و سایر توضیحات تکمیلی (پارامتر $K_c = \sigma'_h / \sigma'_v$ بیانگر نسبت تنش تحکیم مؤثر است و بالانویس OC روی مقادیر σ'_c نشان‌دهنده اندازه‌گیری پارامترهای کشسان تحت حالت تنش پیش‌تحکیم‌یافته با نسبت پیش‌تحکیم برابر با ۲ می‌باشد)

Table 2. Compiled database of anisotropic elastic parameters for 7 different specimens representing 3 types of sand, measured through laboratory tests conducted by Kuwano (1999) and Kuwano and Jardine (2002), together with the corresponding stress conditions and other supplementary information (Parameter $K_c = \sigma'_h / \sigma'_v$ denotes the effective consolidation stress ratio, and the superscript OC over the σ'_c values corresponds to measurements obtained under an overconsolidated stress condition characterized by an OCR of 2)

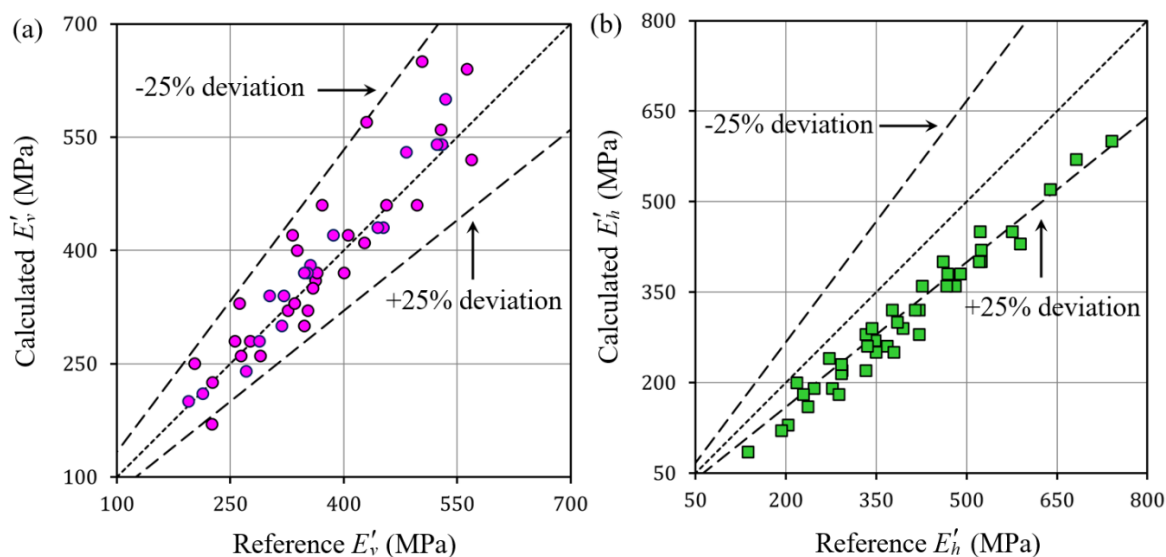
| Soil type | Specimen ID | Soil origin | Soil characteristics | K_c | σ'_c (kPa) | E_v^u (MPa) | E'_v (MPa) | E'_h (MPa) | G_{vh}^u (MPa) | G_{hh}^u (MPa) |
|--------------------------|-------------|---------------------------|--|-------|---------------------|---------------|--------------|--------------|------------------|------------------|
| Ham River Sand (new-HRS) | H304 | Chertsey, England | A well-characterized quartz sand commonly used in research, composed mainly of subangular to angular particles with a moderately uniform medium grain size ranging from approximately 0.15 to 0.5 mm. It exhibits a uniformity coefficient of $C_u = 1.67$, and the three specimens investigated—H304 ($D_r = 38\%$, loose), H935 ($D_r = 63\%$, dense), and H601 ($D_r = 60\%$, dense)—represent varying initial relative densities. | 0.95 | 80 | 260 | 225 | 190 | 77 | 81 |
| | | | | 0.95 | 120 | 305 | 280 | 215 | 93 | 96 |
| | | | | 0.95 | 160 | 360 | 320 | 250 | 111 | 115 |
| | | | | 0.95 | 200 | 400 | 370 | 290 | 125 | 131 |
| | | | | 0.95 | 300 | 550 | 460 | 380 | 151 | 157 |
| | | | | 0.95 | 400 | 670 | 560 | 430 | 178 | 189 |
| | | | | 0.95 | 200 ^(OC) | 420 | 350 | N/A | 120 | 125 |
| | H935 | | | 0.95 | 80 | 350 | 280 | 220 | 86 | 93 |
| | | | | 0.95 | 120 | 420 | 300 | 260 | 114 | 118 |
| | | | | 0.95 | 160 | 480 | 360 | 320 | 124 | 135 |
| | | | | 0.95 | 200 | 540 | 420 | 360 | 141 | 155 |
| | | | | 0.95 | 300 | 690 | 540 | 450 | 173 | 182 |
| | | | | 0.95 | 400 | 780 | 640 | 570 | 196 | 218 |
| | H601 | | | 0.45 | 43 | 280 | 260 | 130 | 72 | 62 |
| | | | | 0.45 | 80 | 340 | 330 | 190 | 97 | 87 |
| | | | | 0.45 | 120 | 420 | 410 | 220 | 119 | 104 |
| | | | | 0.45 | 160 | 470 | 460 | 250 | 138 | 119 |
| 0.45 | | 200 | 540 | 520 | 280 | 155 | 131 | | | |
| 0.95 | | 80 | 300 | 250 | 270 | 91 | 123 | | | |
| Dunkerque Sand (DKS) | D903 | The Coastline of Northern | A naturally occurring marine quartz sand characterized by well-sorted fine to medium grains with | 0.95 | 80 | 300 | 250 | 270 | 91 | 123 |
| | | | | 0.95 | 120 | 380 | 330 | 320 | 111 | 143 |

| Soil type | Specimen ID | Soil origin | Soil characteristics | K_c | σ'_c (kPa) | E'_v (MPa) | E'_v (MPa) | E'_h (MPa) | G'_{vh} (MPa) | G'_{hh} (MPa) |
|------------------|---------------------|-------------|--|-------|---------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| | | France | predominantly subrounded particle shapes, typically spanning the size range of 0.1–0.6 mm. The material was reconstituted to achieve a medium-dense packing condition, corresponding to an initial relative density of approximately $D_r = 57\%$. | 0.95 | 160 | 440 | 400 | 380 | 133 | 160 |
| | | | | 0.95 | 200 | 520 | 460 | 420 | 145 | 175 |
| | | | | 0.95 | 300 | 680 | 570 | 520 | 168 | 209 |
| | | | | 0.95 | 400 | 760 | 650 | 600 | 198 | 245 |
| | | | | 0.95 | 200 ^(OC) | 500 | 420 | N/A | 146 | 195 |
| Glass Beads (GB) | G911 | N/A | The glass bead specimens consisted of nearly perfectly spherical particles produced in two distinct size ranges: 0.210–0.325 mm for G911 and G912, and 0.115–0.180 mm for G922. The particles had a specific gravity of $G_s = 2.95$, with corresponding uniformity coefficients of $C_u = 1.28$ for G911–G912 and $C_u = 1.63$ for G922. The initial void ratios were measured as $e_0 = 0.705$, 0.689, and 0.680 for the respective specimens. | 0.95 | 80 | 220 | 200 | 180 | 71 | 78 |
| | | | | 0.95 | 120 | 290 | 240 | 230 | 94 | 98 |
| | | | | 0.95 | 160 | 320 | 300 | 260 | 110 | 114 |
| | | | | 0.95 | 200 | 400 | 380 | 300 | 121 | 127 |
| | | | | 0.95 | 300 | 500 | 430 | 360 | 150 | 152 |
| | | | | 0.95 | 400 | 600 | 540 | 400 | 169 | 168 |
| | G912 | | | 0.95 | 200 ^(OC) | 370 | 340 | N/A | 118 | 138 |
| | | | | 0.45 | 42 | 200 | 170 | 85 | 55 | 41 |
| | | | | 0.45 | 80 | 270 | 260 | 120 | 74 | 59 |
| | | | | 0.45 | 120 | 340 | 320 | 160 | 89 | 72 |
| | | | | 0.45 | 160 | 410 | 370 | 180 | 105 | 87 |
| | | | | 0.95 | 300 | 500 | 430 | 360 | 139 | 136 |
| | G922 | | | 0.95 | 400 | 600 | 540 | 400 | 167 | 166 |
| | | | | 0.95 | 200 ^(OC) | 370 | 340 | N/A | 110 | 116 |
| | | | | 0.95 | 80 | 240 | 210 | 200 | 70 | 71 |
| | | | | 0.95 | 120 | 300 | 280 | 240 | 91 | 88 |
| | | | | 0.95 | 160 | 420 | 370 | 280 | 107 | 104 |
| | | | | 0.95 | 200 | 480 | 420 | 320 | 119 | 117 |
| | | | | 0.95 | 300 | 590 | 530 | 400 | 147 | 143 |
| | | | | 0.95 | 400 | 670 | 600 | 450 | 164 | 162 |
| 0.95 | 200 ^(OC) | 460 | 370 | 290 | 106 | 106 | | | | |

مقایسه‌ی بین مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_v و E'_h را در محدوده‌ی خطوط خطای نسبی $\pm 25\%$ نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر محاسبه‌شده برای E'_v به‌خوبی پیرامون خط تساوی متمرکز بوده و به‌جز یک مورد، تمامی نقاط در بازه‌ی خطوط خطا قرار دارند. این رفتار بیانگر دقت بالای رویکرد پیشنهادی و تأییدکننده‌ی اعتبار معادله‌ی (۲۵) در برآورد E'_v برای خاک‌های دانه‌ای اشباع است. در مقابل، مقادیر محاسبه‌شده برای E'_h گرایش به بیش‌برآورد داشته و حدود 67% از داده‌ها خارج از محدوده‌ی خطا قرار گرفته‌اند. دلیل بالقوه‌ی این انحراف و نحوه‌ی اصلاح آن در بخش بعدی بررسی خواهد شد.

محاسبه‌ی E'_v و E'_h برای نمونه‌های ماسه‌ای آزمایش‌شده

به‌منظور آزمون عملی رویکرد توسعه‌یافته، پارامترهای کشسان E'_v ، G'_{vh} ($= G'_{vh}$) و G'_{hh} ($= G'_{hh}$) از جدول ۲ برای هر آزمون در معادله‌ی (۲۵) جایگذاری شدند تا مقادیر متناظر E'_v محاسبه گردد. سپس، مقادیر به‌دست‌آمده‌ی E'_v همراه با مدول‌های G'_{vh} و G'_{hh} در معادله‌ی (۱۴) وارد شدند تا E'_h تعیین شود. در ادامه، مقادیر محاسبه‌شده‌ی E'_v و E'_h با داده‌های مرجع حاصل از اندازه‌گیری‌های مستقیم آزمایشگاهی مقایسه شدند تا صحت و اعتبار نتایج محاسبه‌شده مورد ارزیابی قرار گیرد. شکل‌های ۳a و ۳b به‌ترتیب



شکل ۳- مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی مدول‌های یانگ زهکشی‌شده‌ی ناهمسانگرد. (a) مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_v . (b) مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_h

Fig. 3. Comparison between reference and calculated values for drained anisotropic Young's moduli. a) Reference versus calculated values of E'_v . b) Reference versus calculated values of E'_h

می‌گردد. علت اصلی و محتمل این پدیده را می‌توان به تفاوت سطوح کرنشی نسبت داد که یکی مبنای استخراج رابطه تجربی (۱۴) و دیگری مبنای تعیین پارامترهای کشسان در آزمون‌های سه‌محوری استاتیکی گزارش‌شده در منابع مذکور بوده‌اند. به‌طور مشخص، معادله (۱۴) از نتایج اندازه‌گیری‌های سرعت‌های لرزه‌ای و تحلیل‌هایی استنتاج شده است که در محدوده‌ی کرنش‌های بسیار کوچک (در

بررسی علت بیش‌برآورد E'_h در نمونه‌های ماسه‌ای آزمایش‌شده

بررسی داده‌های گزارش‌شده توسط کووانو (Kuwano, 1999) و کووانو و جاردین (Kuwano and Jardine, 2002) نشان داد که رویکرد پیشنهادی به صورت سیستماتیک منجر به بیش‌برآورد E'_h

مرتبه 10^{-6}) معتبر فرض می‌شوند. در مقابل، پارامترهای کشسان گزارش شده در کووانو و همکاران عمدتاً از آزمون‌های سه‌محوری استاتیکی با دامنه کرنشی بزرگ‌تر استخراج شده‌اند؛ برای نمونه، این کرنش‌ها در حدود 3×10^{-5} گزارش شده‌اند که تقریباً ۳۰ برابر مرتبه کرنش القایی توسط امواج لرزه‌ای است. همچنین نویسندگان خود تصریح کرده‌اند که پارامترهای به‌دست‌آمده در این آزمون‌ها نمایانگر خواص نسبتاً کشسان یا شبه‌کشسان بوده‌اند و نه رفتار کاملاً خطی-کشسان در مرتبه‌ی کرنش‌های بسیار کوچک. بنابراین منطقی است انتظار داشته باشیم که روابط استخراج شده بر پایه‌ی کرنش‌های مختلف نتایجی متفاوت به‌دست دهند.

با در نظر گرفتن تفاوت ذاتی بین میدان کرنشی مبنای استخراج معادله‌ی (۱۴) و کرنش‌های آزمون‌های استاتیکی، منطقی است که ضریب توان در رابطه‌ی توانی بین نسبت‌های مدول‌ها در هر بازه‌ی کرنشی، مقدار متفاوتی داشته باشد. برای آزمون این فرض، مقادیر E'_h/E'_v بر حسب G'_{hh}/G'_{vh} از داده‌های استاتیکی جدول ۲ رسم و تحلیل رگرسیون انجام شد. رابطه توانی بازتعریف شده به‌صورت زیر به‌دست آمد:

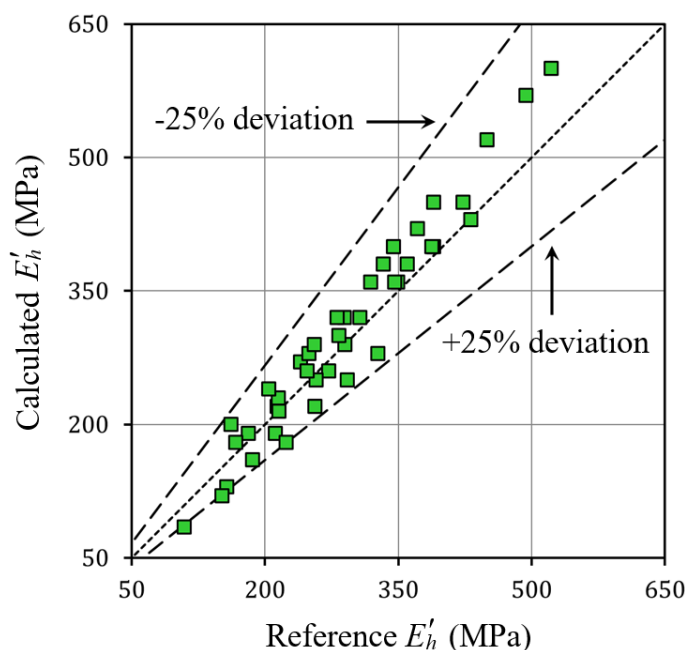
$$E'_h/E'_v = 0.74(G'_{hh}/G'_{vh})^{1.55} \quad (26)$$

که از برازش رگرسیونی روی داده‌های استاتیکی مقدار $R^2 = 0.77$ و $N = 42$ به‌دست آمد.

برای بررسی تأثیر این بازتعریف، مقادیر محاسبه‌شده‌ی E'_v به‌همراه G'_{hh} و G'_{vh} گزارش شده در جدول ۲ در معادله‌ی (۲۶) قرار داده شدند تا مقادیر بازارزیابی‌شده‌ی E'_h محاسبه شوند. شکل ۴ مقایسه‌ی این مقادیر ارزیابی‌شده را با مقادیر مرجع مستقیم آزمایشگاهی نشان می‌دهد. مطابق شکل، استفاده از رابطه بازبینی شده نه تنها مشکل بیش‌برآورد را برطرف می‌سازد، بلکه نقاط داده به‌خوبی پیرامون خط تساوی متمرکز شده‌اند؛ تنها دو نقطه خارج از

بازه‌ی خطای $\pm 25\%$ قرار گرفتند. بنابراین می‌توان با اطمینان استنتاج کرد که بخش عمده‌ی بیش‌برآورد مشاهده شده برای E'_h به تفاوت ذاتی بین سطوح کرنش القایی توسط امواج لرزه‌ای (مبنای معادله‌ی (۱۴)) و سطوح کرنشی مورد استفاده در آزمون‌های سه‌محوری استاتیکی نسبت داده می‌شود. نتیجه‌گیری راهبردی این است که روابط بین نسبت‌های مدول‌ها باید مطابق با دامنه‌ی کرنشی مورد استفاده کالیبره شوند؛ بدین معنا که معادلات استنتاج‌شده برای کرنش‌های بسیار کوچک (در مرتبه 10^{-6} یا کمتر) برای برآورد مدول‌ها بر پایه‌ی سرعت‌های لرزه‌ای معتبر خواهند بود. در مقابل، زمانی که داده‌های اولیه‌ی موردنیاز از آزمون‌های استاتیکی با کرنش‌های بزرگ‌تر به‌دست می‌آیند، لازم است ضرایب ثابت رابطه توانی بر اساس آن داده‌ها بازتخمین زده شوند (همانند معادله‌ی (۲۶)) تا نتایجی قابل‌اعتماد و بی‌طرفانه حاصل گردد.

همچنین قابل توجه است که بیشینه فشار محفظه‌ای مؤثر σ'_c برای نمونه‌های آزمایش‌شده در جدول ۲ که مبنای استخراج رابطه (۲۶) بوده است، برابر با ۴۰۰ کیلوپاسکال می‌باشد. در مقادیر تنش فراتر از این حد، چه تحت بارگذاری همسانگرد و چه ناهمسانگرد، امکان بروز تغییرشکل‌های غیرقابل برگشت و حتی گسیختگی در نمونه وجود دارد که این امر می‌تواند موجب تغییر ساختار طبیعی و چیدمان هندسی ذرات خاک شود. در چنین شرایطی، احتمال عدم تبعیت نمونه از رابطه پیشنهادشده (رابطه ۲۶) افزایش می‌یابد. بنابراین، در کاربرد رابطه مذکور ضروری است که به مقادیر تنش اعمالی توجه ویژه شود و میدان تنش مؤثر به‌گونه‌ای انتخاب گردد که نمونه همچنان در محدوده رفتار کشسان باقی بماند. با رعایت این احتیاط معقول، می‌توان با اطمینان کافی از روابط توانی شکل نظیر رابطه (۲۶) بهره برد و صرفاً با کالیبره کردن ضرایب ثابت، آن‌ها را مورد استفاده قرار داد.



شکل ۴- مقایسه‌ی مقادیر مرجع و بازآزمایی‌شده‌ی E'_h بر مبنای رابطه‌ی (۲۶)

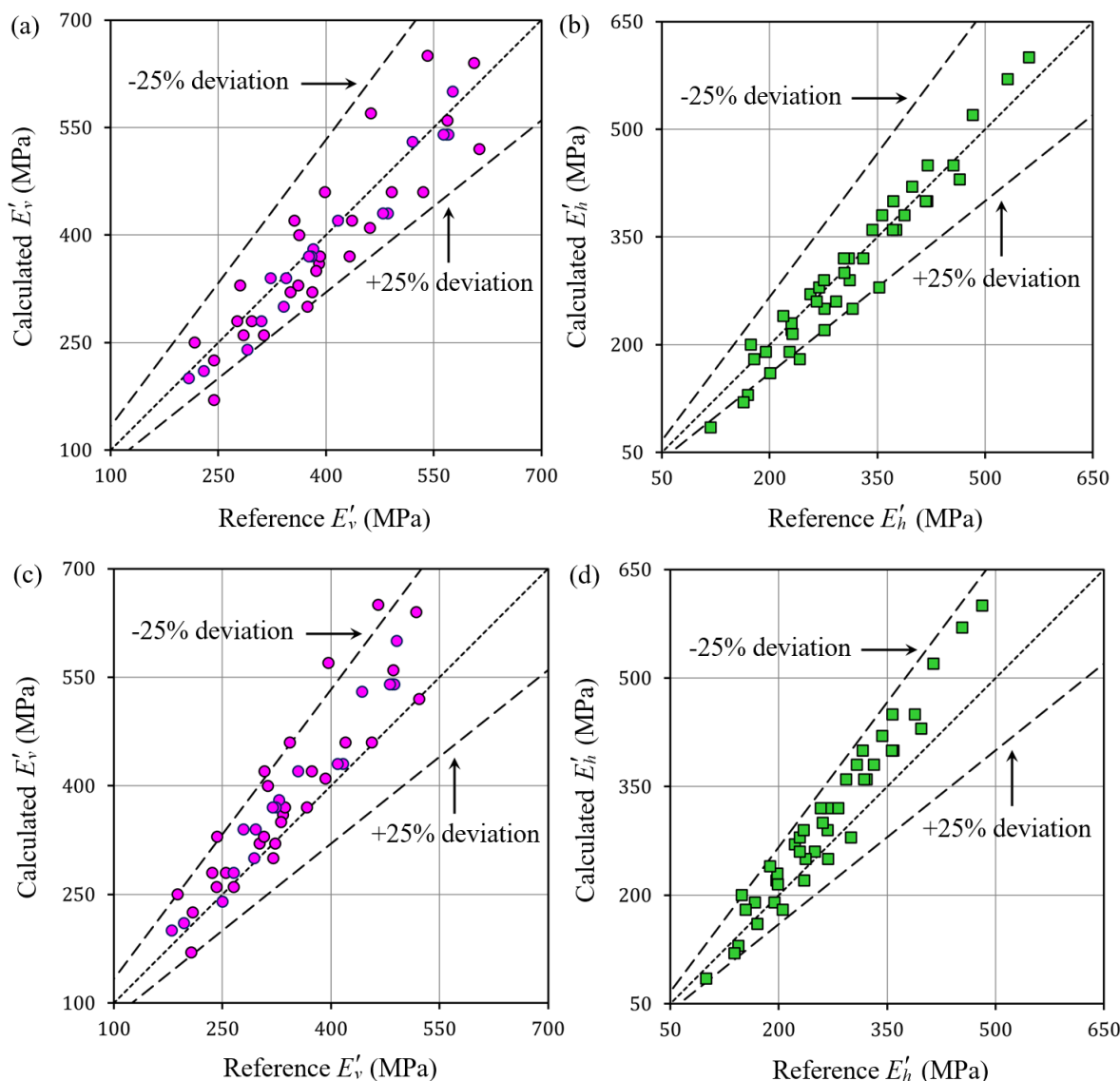
Fig. 4. Comparison between reference re-evaluated values of E'_h based on Eq. (26)

این تغییرات بر مقادیر ارزیابی‌شده مدول‌های یانگ E'_h و E'_v مورد تحلیل قرار گرفت. در این راستا، شکل‌های ۵a و ۵b به ترتیب مقادیر ارزیابی‌شده E'_h و E'_v را در صورت افزایش ۱۰٪ در G_{hh}^u و G_{vh}^u نشان می‌دهند. شکل‌های ۵c و ۵d نیز نتایج متناظر را برای کاهش ۱۰٪ در این مدول‌ها ارائه می‌کنند. در تمامی این چهار شکل، تغییرات ایجادشده در مقادیر ارزیابی‌شده مدول‌های یانگ ناهمسانگرد بسیار ناچیز بوده و تقریباً تمامی نقاط در محدوده‌ی میانی خطوط خطای نسبی $\pm 25\%$ باقی می‌مانند. این موضوع نشان می‌دهد که مقادیر E'_v و E'_h نسبت به تغییرات تا $\pm 10\%$ در مدول‌های برشی G_{hh}^u و G_{vh}^u حساسیت معناداری ندارند. در نتیجه، روش پیشنهادی از پایداری کافی برخوردار بوده و دقت آن وابستگی قابل توجهی به مقدار دقیق مدول‌های برشی ندارد. این امر صحت و استواری رویکرد ارائه‌شده در این مطالعه را تقویت می‌کند.

حساسیت E'_h و E'_v نسبت به احتمال عدم تساوی دقیق

مدول‌های برشی (G_{vh}^u و G_{vh}^u) و (G_{hh}^u و G_{hh}^u)

همانگونه که پیش‌تر در معادلات (۱۰) و (۱۱) تشریح شد، نظر به اینکه آب در برابر برش مقاومتی ندارد، مدول برشی خاک از نظر فیزیکی از وضعیت زهکشی مستقل بوده و صرفاً تابع ویژگی‌های اسکلت خاک است (Das and Ramana, 2011; Pegah and Liu, 2020b). بر این اساس، اندازه‌گیری این مدول در شرایط زهکشی‌شده و زهکشی‌نشده برای خاک‌های اشباع منجر به مقادیر یکسان می‌شود. بیان ریاضی این موضوع نیز در معادلات یادشده آمده است. به‌منظور بررسی تجربی این فرض و ارزیابی حساسیت روش پیشنهادی نسبت به انحرافات احتمالی مدول‌های برشی، تغییراتی به میزان $\pm 10\%$ در مقادیر G_{hh}^u و G_{vh}^u گزارش‌شده در جدول ۲ اعمال شد. سپس تأثیر



شکل ۵- مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی مدول‌های یانگ زهکشی‌شده‌ی ناهمسانگرد. (a) مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_v در صورت افزایش 10% در مقادیر G^u_{vh} و G^u_{hh} . (b) مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_h بر اساس رابطه‌ی (۲۶) در صورت افزایش 10% در مقادیر G^u_{vh} و G^u_{hh} . (c) مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_v در صورت کاهش 10% در مقادیر G^u_{vh} و G^u_{hh} . (d) مقایسه‌ی مقادیر مرجع و محاسبه‌شده‌ی E'_h بر اساس رابطه‌ی (۲۶) در صورت کاهش 10% در مقادیر G^u_{vh} و G^u_{hh} .

Fig. 5. Comparison between reference and calculated values of drained anisotropic Young's moduli. a) Reference versus calculated values of E'_v with a 10% increase in G^u_{vh} and G^u_{hh} . b) Reference versus calculated values of E'_h based on Eq. (26) with a 10% increase in G^u_{vh} and G^u_{hh} . c) Reference versus calculated values of E'_v with a 10% decrease in G^u_{vh} and G^u_{hh} . d) Reference versus calculated values of E'_h based on Eq. (26) with a 10% decrease in G^u_{vh} and G^u_{hh} .

نتیجه‌گیری

بسیار مناسبی وجود دارد که اعتبار و قابلیت اعتماد روش پیشنهادی را تأیید می‌کند.

به‌طور کلی، مطابق با رویکرد تدوین‌شده در این پژوهش، مدول‌های زهکشی‌شده‌ی E'_h و E'_v می‌توانند به‌طور مؤثر از سه پارامتر زهکشی‌نشده‌ی E'_v ، G'_{vh} و G'_{hh} تعیین شوند؛ پارامترهایی که خود مستقیماً از سرعت‌های V_{SV} ، V_{PH} و V_{SH} حاصل از آزمون‌های لرزه‌ای برجا قابل استخراج هستند. این نتیجه بدین معناست که تکنیک‌های لرزه‌ای غیرمخرب می‌توانند به‌عنوان ابزارهایی سودمند و کارآمد برای برآورد مدول‌های یانگ زهکشی‌شده‌ی ناهمسانگرد E'_h و E'_v در رسوبات اشباع خاک‌های دانه‌ای به‌کار گرفته شوند.

چارچوب نظری ارائه‌شده در این مطالعه، با وجود آنکه برای خاک‌های دانه‌ای اشباع تدوین شده است، می‌تواند زمینه‌ساز گسترش روش‌های مشابه برای سایر انواع خاک نیز باشد. از جمله، توسعه این رویکرد برای خاک‌های ریزدانه اشباع و همچنین خاک‌های سیمانی‌شده — که در آن‌ها وابستگی رفتار زهکشی‌شده و زهکشی‌نشده پیچیده‌تر بوده و چالش‌های مکانیکی بیشتری مطرح است — می‌تواند موضوع پژوهش‌های آینده باشد. چنین توسعه‌ای قادر است دامنه کاربرد روابط پیشنهادی را در طیف گسترده‌تری از محیط‌های ژئوتکنیکی افزایش دهد.

هدف اصلی این پژوهش، توسعه‌ی یک رویکرد کارآمد برای محاسبه سختی‌های کشسان زهکشی‌شده‌ی ناهمسانگرد در رسوبات خاک‌های دانه‌ای اشباع، بر مبنای اندازه‌گیری سختی‌های زهکشی‌نشده بود. با استفاده از مجموعه‌ای از معادلات مستخرج از نظریه‌ی کشسانی ناهمسانگرد متقاطع و ترکیب آن‌ها با یک رابطه‌ی تجربی توسعه‌یافته در این مطالعه، روابط جدیدی برای مدول‌های زهکشی‌شده‌ی E'_h و E'_v به‌دست آمد که امکان محاسبه آن‌ها را به صورت توابعی از سه مدول زهکشی‌نشده‌ی E'_v ، G'_{vh} و G'_{hh} فراهم ساخت. این سه مدول نیز به نوبه‌ی خود بر حسب مولفه‌های ناهمسانگرد سرعت‌های امواج لرزه‌ای P و S بیان شدند که فرآیند اندازه‌گیری آن‌ها در صحرا از طریق تکنیک‌های غیرمخرب و کارآمد مورد بحث قرار گرفت. به‌منظور ارزیابی دقت و صحت رویکرد پیشنهادی، داده‌های کشسان ناهمسانگرد حاصل از ۴۶ آزمون آزمایشگاهی بر روی ۷ نمونه خاک متعلق به ۳ نوع ماسه‌ی مختلف از مطالعات پیشین گردآوری و مورد تحلیل قرار گرفتند. مقادیر E'_h و E'_v برای هر آزمون به‌وسیله‌ی روش پیشنهادی محاسبه شد و با مقادیر مرجع اندازه‌گیری‌شده‌ی متناظر مقایسه شدند. نتایج این مقایسه نشان داد که بین مقادیر محاسبه‌شده و مقادیر مرجع تطابق

References

- Anhdan, L., Koseki, J., 2005. Small strain behavior of dense granular soils by true triaxial tests. *Soils and Foundations* 45 (3), 21-38.
- Bellotti, R., Jamiolkowski, M., Lo Presti, D.C.F., O'Neill, D.A., 1996. Anisotropy of small strain stiffness in Ticino sand. *Geotechnique* 46 (1), 115-131.
- Chowdhury, R.N., King, G.J.W., 1971. Discussion: Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique* 21 (2), 181-183.
- Chowdhury, R.N., King, G.J.W., 1972. Discussion: Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique* 22 (1), 183-185

- Clayton, C.R.I., 2011. Stiffness at small strain: research and practice. *Geotechnique* 61, 1, 5-37.
- Das, B.M., Ramana, G.V., 2011. *Principles of Soil Dynamics*, 2nd Edition, Cengage Learning, Stamford, USA.
- Das, B.M., Sobhan, K., 2014. *Principles of Geotechnical Engineering*, 4th ed. Cengage Learning, Stamford, USA.
- Dutta, T.T., Otsubo, M., Kuwano, R., Sato, T., 2020. Estimating multidirectional stiffness of soils using planar piezoelectric transducers in a large triaxial apparatus. *Soils and Foundations* 60, 1269- 1286.
- Ezaoui, A., Di Benedetto, H., 2009. Experimental measurements of the global anisotropic elastic behaviour of dry Hostun sand during triaxial tests, and effect of sample preparation. *Geotechnique* 59 (7), 621-635.

- Fioravante, V., 2000. Anisotropy of small strain stiffness of Ticino and Kenya sands from seismic wave propagation measured in triaxial testing. *Soils and Foundations* 40 (4), 129-142.
- Fioravante, V., Giretti, D., Jamiolkowski, M., 2013. Small strain stiffness of carbonate Kenya Sand. *Engineering Geology* 161, 65-80.
- Foti, S., Lai, C.G., Rix, G., Strobbia, C., 2015. Surface wave methods for near-surface site characterization, 1st Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, USA.
- Gibson, R.E., 1974. The analytical method in soil mechanics. *Geotechnique* 33 (2), 165-180.
- Graham, J., Houlsby, G.T., 1983. Anisotropic elasticity of a natural clay. *Geotechnique* 33 (2), 165-180.
- Gu, X.Q., Hu, J., Huang, M., 2017. Anisotropy of elasticity and fabric of granular soils. *Granular Matter*, 19:33.
- Gu, X.Q., Yang, S., 2018. Why the OCR may reduce the small strain shear stiffness of granular materials? *Acta Geotechnica* 13, 1467-1472.
- Gu, X.Q., Yang, J., Huang, M., Gao, G., 2015. Bender element tests in dry and saturated sand: Signal interpretation and result comparison. *Soils and Foundations* 55 (5), 951-962.
- He, H., Li, M., Senetakis, K., 2017. A note on influence of stress anisotropy on the Poisson's ratio of dry sand. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* 9, 1159-1164.
- Hoque, E., Tatsuoka, F., 2004. Effects of stress ratio on small-strain stiffness during triaxial shearing. *Geotechnique* 54 (7), 429-439.
- Ivanov, J., Miller, R.D., Feigenbaum, D., Morton, S.L.C., Peterie, S.L., Dunbar, J.B., 2017. Revisiting levees in southern Texas using Love-wave multichannel analysis of surface waves with the high-resolution linear Radon transform. *Interpretation* 5 (3), T287-98.
- Khan, Z., Cascante, G., Hesham El Naggar, M., 2011. Measurement of dynamic properties of stiff specimens using ultrasonic waves. *Canadian Geotechnical Journal* 48, 1-15.
- Kumar, J., Madhusudhan, B. N., 2010. Effect of relative density and confining pressure on Poisson ratio from bender and extender elements tests. *Geotechnique* 60 (7), 561-567.
- Kuwano, R., 1999. The stiffness and yielding anisotropy of sand. PhD Thesis, University of London (Imperial College).
- Kuwano, R., Jardine, R.J., 2002. On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains. *Geotechnique* 52 (10), 727-749.
- Lings, M. L., 2001. Drained and undrained anisotropic elastic stiffness parameters. *Geotechnique* 51, 6, 555-565.
- Nishimura, S., 2014. Cross-anisotropic deformation characteristics of natural sedimentary clays. *Geotechnique* 64, 12, 981-996.
- Pegah, E., Gu, X.Q., Liu, H., 2024. Fabric anisotropy of granular soils and its dependency on grading and particles specifications. *Acta Geotechnica* 19, 7619-7633.
- Pegah, E., Liu, H., 2016. Application of near-surface seismic refraction tomography and multichannel analysis of surface waves for geotechnical site characterizations: A case study. *Engineering Geology* 208, 100-113.
- Pegah, E., Liu, H., 2020a. Evaluation of hyperbolic stress-strain and bulk-modulus model parameters in granular soil mass using seismic surveying. *Engineering Geology* 266, 105456.
- Pegah, E., Liu, H., 2020b. Evaluating the overconsolidation ratios and peak friction angles of granular soil deposits using noninvasive seismic surveying. *Acta Geotechnica* 15, 3193-3209.
- Pegah, E., Liu, H., 2025. Determination of cross-anisotropic elastic constants of in situ soils using joint application of seismic refraction and downhole surveys. *Transportation Geotechnics* 55, 101689.
- Pegah, E., Liu, H., Dastanboo, N., 2017. Evaluation of the lateral earth pressure coefficients at-rest in granular soil deposits using the anisotropic components of S-wave velocity. *Engineering Geology* 230, 55-63.
- Pegah, E., Liu, H., Gholami, A., 2021. Estimating drained cross-anisotropic elastic parameters in saturated clays using the undrained properties. *Engineering Geology* 293, 106340.
- Pegah, E., Liu, H., Gu, X.Q., Gholami, A., 2022. A semi-analytical approach for efficient calculation of drained cross-anisotropic elastic moduli in saturated granular soils from undrained attributes. *Computers and Geotechnics* 148, 104794.
- Pegah, E., Mahmoodi, M., Siavashpoo, A., 2016. Evaluation of seismic hazard and site geodynamic properties by using geophysical methods in the north of Iran. *Journal of Civil Engineering and Construction* 5 (2), 126-142.
- Sloan, S. D., Nolan, J. J., Broadfoot, S. W., McKenna, J. R., Metheny, O. M., 2013. Using near-surface seismic

refraction tomography and multichannel analysis of surface waves to detect shallow tunnels: A feasibility study. *Journal of Applied Geophysics* 99, 60-65.

Talae Firozjaee, F., Pegah, E., Misaghi, A., 2024. Fabric anisotropy in sands and assessing its dependence on grading and surface appearance parameters. *Kharazmi Journal of Earth Sciences* 10 (1), 73-90.

Uyanik, O., 2011. The porosity of saturated shallow sediments from seismic compressional and shear wave velocities. *Journal of Applied Geophysics* 73, 16-24.

Xia, J., 2014. Estimation of near-surface shear wave velocities and quality factors using multichannel analysis of surface-wave methods. *Journal of Applied Geophysics* 103, 140-151.

Zhu, Y., Gong, J., Nie, Z., 2020. Numerical investigation of the elastic properties of binary mixtures as a function of the size ratio and fines content. *International Journal of Geomechanics* 20 (9), 04020155.

پیوست الف

جدول ۱- پایگاه داده تدوین شده از مدول‌های یانگ و برشی ناهمسانگرد اندازه‌گیری شده در شرایط مختلف تنش برای طیفی از خاک‌های دانه‌ای (σ'_v و σ'_h) به ترتیب نشان‌دهنده تنش‌های مؤثر اصلی در جهات قائم و افقی وارد بر نمونه‌ها در طول آزمایش هستند)

Table 1. A database compiled from anisotropic Young's and shear moduli measured under different stress conditions for a range of granular soils (σ'_v and σ'_h denote the applied vertical and horizontal effective stresses on the specimens during the testing process)

| Soil type | Test/sample name | σ'_v (kPa) | σ'_h (kPa) | G'_{hh} (MPa) | G'_{vh} (MPa) | E'_h (MPa) | E'_v (MPa) | G'_{hh}/G'_{vh} | E'_h/E'_v | Data reference |
|-------------|------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|---------------------------|
| Ticino sand | 390 | 50 | 25 | 56.1 | 57.0 | 133.8 | 160.3 | 0.986 | 0.835 | Bellotti et al. (1996) |
| | | 100 | 50 | 77.1 | 79.5 | 184.1 | 225.0 | 0.969 | 0.818 | |
| | | 150 | 75 | 92.9 | 96.8 | 222.0 | 274.6 | 0.960 | 0.809 | |
| | | 200 | 100 | 106.1 | 111.2 | 253.7 | 316.2 | 0.953 | 0.802 | |
| | | 250 | 125 | 117.6 | 124.0 | 281.4 | 353.1 | 0.948 | 0.797 | |
| | | 300 | 150 | 127.8 | 135.4 | 306.2 | 386.6 | 0.944 | 0.792 | |
| | 383 | 50 | 50 | 76.8 | 63.2 | 177.6 | 146.1 | 1.215 | 1.215 | |
| | | 100 | 100 | 106.9 | 88.9 | 248.8 | 204.7 | 1.203 | 1.215 | |
| | | 150 | 150 | 129.8 | 108.6 | 303.5 | 250.0 | 1.196 | 1.214 | |
| | | 200 | 200 | 149.1 | 125.2 | 349.4 | 287.9 | 1.191 | 1.214 | |
| | | 250 | 250 | 166.0 | 139.9 | 390.0 | 321.4 | 1.187 | 1.214 | |
| | | 300 | 300 | 181.3 | 153.2 | 426.5 | 351.4 | 1.183 | 1.214 | |
| | 384 | 50 | 75 | 92.6 | 73.1 | 214.7 | 137.8 | 1.267 | 1.559 | |
| | | 67 | 100 | 106.1 | 87.9 | 247.8 | 160.2 | 1.207 | 1.546 | |
| | | 100 | 150 | 128.7 | 102.0 | 304.1 | 198.8 | 1.262 | 1.530 | |
| | | 150 | 225 | 156.0 | 123.9 | 372.5 | 245.9 | 1.259 | 1.514 | |
| | | 200 | 300 | 178.8 | 142.3 | 429.9 | 285.8 | 1.257 | 1.504 | |
| | | 250 | 375 | 198.8 | 158.4 | 480.8 | 321.5 | 1.255 | 1.495 | |
| | 385 | 50 | 100 | 108.8 | 74.4 | 253.1 | 132.9 | 1.461 | 1.905 | |
| | | 60 | 120 | 118.5 | 81.3 | 276.1 | 145.3 | 1.457 | 1.899 | |
| | | | | | | | | | | |

| Soil type | Test/sample name | σ'_v (kPa) | σ'_h (kPa) | G'_{hh} (MPa) | G'_{vh} (MPa) | E'_h (MPa) | E'_v (MPa) | G'_{hh}/G'_{vh} | E'_h/E'_v | Data reference | |
|--------------|------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|----------------------|----------------------------|
| | | 100 | 200 | 150.9 | 104.4 | 353.8 | 188.5 | 1.445 | 1.876 | | |
| | | 150 | 300 | 182.9 | 127.4 | 430.7 | 231.8 | 1.436 | 1.859 | | |
| | | 200 | 400 | 209.6 | 146.6 | 495.0 | 268.1 | 1.429 | 1.847 | | |
| | | 250 | 500 | 233.2 | 163.7 | 552.6 | 301.3 | 1.424 | 1.834 | | |
| | | 300 | 600 | 254.3 | 179.1 | 603.6 | 330.2 | 1.420 | 1.828 | | |
| Ticino sand | TS - K = 0.5 | N/A | N/A | 61.5 | 65.8 | 141.0 | 131.2 | 0.934 | 1.075 | Fioravante (2000) | |
| | | N/A | N/A | 83.9 | 91.1 | 195.3 | 185.6 | 0.921 | 1.052 | | |
| | | N/A | N/A | 99.8 | 109.9 | 235.8 | 225.5 | 0.908 | 1.046 | | |
| | | N/A | N/A | 112.8 | 126.5 | 269.0 | 259.5 | 0.892 | 1.037 | | |
| | | N/A | N/A | 123.7 | 140.2 | 298.7 | 290.0 | 0.882 | 1.030 | | |
| | | N/A | N/A | 134.5 | 153.3 | 324.7 | 316.1 | 0.878 | 1.027 | | |
| | TS - K = 1 | N/A | N/A | 81.7 | 73.5 | 187.0 | 130.1 | 1.113 | 1.437 | | |
| | | N/A | N/A | 110.0 | 101.1 | 259.3 | 183.1 | 1.088 | 1.416 | | |
| | | N/A | N/A | 130.0 | 122.3 | 312.9 | 223.7 | 1.063 | 1.399 | | |
| | | N/A | N/A | 147.7 | 139.9 | 357.6 | 256.7 | 1.055 | 1.393 | | |
| | | N/A | N/A | 162.4 | 155.2 | 397.0 | 286.7 | 1.046 | 1.385 | | |
| | | N/A | N/A | 175.9 | 169.3 | 431.7 | 313.8 | 1.039 | 1.376 | | |
| | TS - K = 2.0 | N/A | N/A | 114.8 | 88.6 | 251.3 | 143.5 | 1.296 | 1.751 | | |
| | | N/A | N/A | 143.5 | 112.2 | 273.0 | 184.3 | 1.279 | 1.481 | | |
| | | N/A | N/A | 170.4 | 135.8 | 347.0 | 224.5 | 1.255 | 1.545 | | |
| | | N/A | N/A | 193.3 | 154.9 | 417.8 | 259.0 | 1.248 | 1.613 | | |
| | | N/A | N/A | 213.1 | 172.1 | 477.8 | 288.3 | 1.238 | 1.657 | | |
| | Kenya sand | KS - K = 0.5 | N/A | N/A | 59.9 | 56.5 | 134.8 | 122.9 | 1.059 | | 1.097 |
| N/A | | | N/A | 73.5 | 69.5 | 166.1 | 146.1 | 1.058 | 1.137 | | |
| N/A | | | N/A | 84.4 | 80.4 | 192.6 | 164.6 | 1.050 | 1.171 | | |
| N/A | | | N/A | 93.9 | 91.3 | 215.8 | 181.0 | 1.029 | 1.192 | | |
| N/A | | | N/A | 104.1 | 98.8 | 236.9 | 195.4 | 1.054 | 1.212 | | |
| KS - K = 1.0 | | N/A | N/A | 59.2 | 46.9 | 135.5 | 101.5 | 1.262 | 1.335 | | |
| | | N/A | N/A | 82.7 | 67.4 | 193.0 | 137.3 | 1.226 | 1.405 | | |
| | | N/A | N/A | 101.4 | 83.9 | 238.1 | 163.2 | 1.209 | 1.459 | | |
| | | N/A | N/A | 116.7 | 96.8 | 276.3 | 183.8 | 1.206 | 1.503 | | |
| | | N/A | N/A | 130.2 | 109.1 | 309.7 | 203.8 | 1.193 | 1.520 | | |
| | | N/A | N/A | 142.5 | 119.7 | 340.8 | 219.1 | 1.191 | 1.556 | | |
| KS - K = 2.0 | | N/A | N/A | 82.5 | 57.8 | 193.9 | 113.8 | 1.426 | 1.704 | | |
| | | N/A | N/A | 100.5 | 71.1 | 239.1 | 136.1 | 1.414 | 1.757 | | |
| | | N/A | N/A | 115.6 | 81.9 | 277.6 | 154.7 | 1.411 | 1.794 | | |
| | | N/A | N/A | 128.8 | 92.2 | 311.4 | 170.4 | 1.398 | 1.827 | | |
| | | N/A | N/A | 140.3 | 101.2 | 342.7 | 184.8 | 1.386 | 1.854 | | |
| Hostun sand | | TC_H400.82p | 50 | 50 | 71.4 | 62.9 | 162.8 | 147.3 | 1.135 | 1.106 | Ezaoui and Di Benedetto |
| | | | 100 | 100 | 96.0 | 82.5 | 218.9 | 195.1 | 1.164 | 1.122 | |

| Soil type | Test/sample name | σ'_v (kPa) | σ'_h (kPa) | G'_{hh} (MPa) | G'_{vh} (MPa) | E'_h (MPa) | E'_v (MPa) | G'_{hh}/G'_{vh} | E'_h/E'_v | Data reference |
|-----------|------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|-------------------|
| | | 200 | 200 | 126.8 | 115.1 | 301.7 | 267.5 | 1.102 | 1.128 | (2009) |
| | | 400 | 400 | 169.0 | 151.6 | 415.7 | 367.7 | 1.115 | 1.131 | |
| | | 600 | 400 | 178.1 | 173.3 | 437.8 | 467.4 | 1.028 | 0.937 | |
| | | 800 | 400 | 183.6 | 191.5 | 436.9 | 531.1 | 0.959 | 0.823 | |
| | | 1200 | 400 | 163.3 | 215.4 | 372.3 | 669.5 | 0.758 | 0.556 | |
| | | 1200 | 400 | 155.8 | 220.7 | 361.2 | 662.2 | 0.706 | 0.546 | |
| | | 800 | 400 | 157.0 | 189.4 | 364.0 | 580.9 | 0.829 | 0.627 | |
| | | 600 | 400 | 152.4 | 177.4 | 356.6 | 484.9 | 0.859 | 0.735 | |
| | | 400 | 400 | 152.2 | 150.6 | 362.2 | 388.0 | 1.011 | 0.933 | |
| | TE_H400.80p | 100 | 100 | 102.8 | 85.2 | 226.2 | 195.4 | 1.207 | 1.157 | |
| | | 200 | 200 | 126.8 | 116.6 | 309.6 | 271.9 | 1.087 | 1.138 | |
| | | 300 | 300 | 147.0 | 139.6 | 355.6 | 327.6 | 1.053 | 1.086 | |
| | | 400 | 400 | 167.1 | 160.6 | 400.9 | 383.4 | 1.040 | 1.046 | |
| | | 300 | 400 | 169.0 | 151.3 | 399.1 | 325.2 | 1.117 | 1.227 | |
| | | 200 | 400 | 167.1 | 124.1 | 400.9 | 235.7 | 1.346 | 1.701 | |
| | | 200 | 400 | 170.3 | 114.3 | 412.0 | 190.5 | 1.490 | 2.163 | |
| | | 300 | 400 | 170.3 | 127.9 | 412.0 | 231.1 | 1.332 | 1.783 | |
| | | 400 | 400 | 170.3 | 142.5 | 412.0 | 282.8 | 1.195 | 1.457 | |
| | TC_H400.73p+v | 100 | 100 | 110.7 | 99.0 | 254.4 | 240.2 | 1.118 | 1.059 | |
| | | 200 | 200 | 152.4 | 134.2 | 347.2 | 309.1 | 1.136 | 1.123 | |
| | | 400 | 400 | 208.9 | 181.5 | 480.3 | 431.1 | 1.151 | 1.114 | |
| | | 800 | 400 | 208.3 | 226.1 | 491.4 | 597.2 | 0.921 | 0.823 | |
| | | 1200 | 400 | 205.7 | 241.4 | 485.2 | 721.5 | 0.852 | 0.672 | |
| | | 1600 | 400 | 180.2 | 255.3 | 436.0 | 778.2 | 0.706 | 0.560 | |
| | | 1600 | 400 | 167.9 | 245.3 | 392.9 | 808.9 | 0.684 | 0.486 | |
| | | 1200 | 400 | 164.8 | 224.4 | 395.4 | 751.1 | 0.734 | 0.526 | |
| | | 800 | 400 | 158.9 | 200.2 | 384.3 | 615.7 | 0.794 | 0.624 | |
| | | 400 | 400 | 157.6 | 170.7 | 378.2 | 418.8 | 0.923 | 0.903 | |
| | TE_H400.74p+v | 200 | 200 | 135.2 | 130.0 | 337.8 | 308.0 | 1.040 | 1.097 | |
| | | 300 | 300 | 165.5 | 155.1 | 416.7 | 377.0 | 1.067 | 1.105 | |
| | | 400 | 400 | 190.7 | 181.0 | 469.2 | 431.1 | 1.054 | 1.089 | |
| | | 300 | 400 | 191.3 | 166.0 | 474.2 | 364.6 | 1.152 | 1.300 | |
| | | 200 | 400 | 192.1 | 141.2 | 480.3 | 271.1 | 1.360 | 1.772 | |
| | | 200 | 400 | 205.7 | 122.0 | 497.5 | 213.2 | 1.686 | 2.333 | |
| | | 300 | 400 | 215.3 | 140.4 | 503.7 | 261.2 | 1.533 | 1.928 | |
| | | 400 | 400 | 212.0 | 157.1 | 496.3 | 306.8 | 1.349 | 1.618 | |
| | TC_H400.74p+t | 100 | 100 | 96.2 | 99.2 | 217.4 | 234.9 | 0.970 | 0.926 | |
| | | 200 | 200 | 127.2 | 130.3 | 284.8 | 322.9 | 0.976 | 0.882 | |
| | | 400 | 400 | 176.9 | 185.8 | 404.0 | 437.2 | 0.952 | 0.924 | |
| | | 800 | 400 | 187.2 | 240.1 | 422.5 | 583.7 | 0.780 | 0.724 | |

| Soil type | Test/sample name | σ'_v (kPa) | σ'_h (kPa) | G'_{hh} (MPa) | G'_{vh} (MPa) | E'_h (MPa) | E'_v (MPa) | G'_{hh}/G'_{vh} | E'_h/E'_v | Data reference |
|-----------|------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|----------------|
| | | 1200 | 400 | 178.7 | 252.8 | 400.3 | 726.5 | 0.707 | 0.551 | |
| | | 1600 | 400 | 158.4 | 255.5 | 354.8 | 897.1 | 0.620 | 0.395 | |
| | | 1200 | 400 | 153.9 | 241.7 | 347.4 | 760.9 | 0.637 | 0.457 | |
| | | 400 | 400 | 149.1 | 180.5 | 332.6 | 448.3 | 0.826 | 0.742 | |
| | TE_H400.73p+t | 200 | 200 | 129.8 | 134.6 | 293.2 | 322.9 | 0.964 | 0.908 | |
| | | 300 | 300 | 151.1 | 155.1 | 335.4 | 383.6 | 0.974 | 0.874 | |
| | | 400 | 400 | 171.2 | 172.4 | 388.0 | 436.0 | 0.993 | 0.890 | |
| | | 300 | 400 | 170.4 | 160.2 | 390.5 | 384.3 | 1.064 | 1.016 | |
| | | 200 | 400 | 172.5 | 144.4 | 389.2 | 283.4 | 1.195 | 1.374 | |
| | | 200 | 400 | 170.8 | 109.4 | 385.5 | 215.7 | 1.561 | 1.787 | |
| | | 300 | 400 | 174.3 | 124.4 | 390.5 | 271.1 | 1.401 | 1.440 | |
| | | 400 | 400 | 171.2 | 163.8 | 388.0 | 331.4 | 1.045 | 1.171 | |
| | Kenya sand | 461 | 50 | 25 | 35.1 | 36.6 | 85.5 | 111.0 | 0.957 | |
| 100 | | | 50 | 50.1 | 52.8 | 121.2 | 157.6 | 0.949 | 0.769 | |
| 150 | | | 75 | 61.9 | 65.6 | 149.0 | 193.8 | 0.944 | 0.769 | |
| 200 | | | 100 | 71.8 | 76.4 | 172.4 | 224.3 | 0.940 | 0.768 | |
| 251 | | | 125 | 80.8 | 86.2 | 193.3 | 251.6 | 0.937 | 0.768 | |
| 300 | | | 150 | 88.8 | 95.0 | 212.0 | 276.2 | 0.935 | 0.768 | |
| 350 | | | 175 | 96.1 | 103.1 | 229.2 | 298.6 | 0.932 | 0.767 | |
| 400 | | | 200 | 103.1 | 110.7 | 245.2 | 319.7 | 0.931 | 0.767 | |
| 450 | | | 225 | 109.5 | 117.8 | 260.3 | 339.4 | 0.929 | 0.767 | |
| 500 | | | 250 | 115.8 | 124.8 | 275.0 | 358.6 | 0.928 | 0.767 | |
| 549 | | | 275 | 121.6 | 131.2 | 288.4 | 376.2 | 0.927 | 0.767 | |
| 599 | | | 300 | 127.5 | 137.7 | 301.9 | 394.0 | 0.926 | 0.766 | |
| 460 | | 50 | 51 | 45.7 | 40.6 | 113.7 | 90.5 | 1.124 | 1.256 | |
| | | 100 | 100 | 67.0 | 59.3 | 165.0 | 131.3 | 1.130 | 1.257 | |
| | | 150 | 151 | 84.2 | 74.4 | 206.2 | 164.0 | 1.132 | 1.257 | |
| | | 200 | 200 | 98.9 | 87.2 | 240.9 | 191.6 | 1.134 | 1.258 | |
| | | 249 | 250 | 112.0 | 98.6 | 271.9 | 216.1 | 1.136 | 1.258 | |
| | | 300 | 300 | 124.2 | 109.3 | 300.9 | 239.2 | 1.137 | 1.258 | |
| | | 350 | 351 | 135.5 | 119.1 | 327.5 | 260.2 | 1.138 | 1.258 | |
| | | 400 | 400 | 146.3 | 128.4 | 352.6 | 280.2 | 1.139 | 1.259 | |
| | | 450 | 450 | 156.3 | 137.2 | 376.2 | 298.9 | 1.140 | 1.258 | |
| | | 499 | 500 | 165.9 | 145.5 | 398.6 | 316.8 | 1.140 | 1.259 | |
| | | 549 | 550 | 175.0 | 153.4 | 419.8 | 333.5 | 1.141 | 1.259 | |
| 599 | | 599 | 183.9 | 161.1 | 440.5 | 350.0 | 1.141 | 1.259 | | |
| 469 | | 25 | 50 | 45.7 | 37.4 | 114.7 | 70.6 | 1.221 | 1.626 | |
| | | 50 | 100 | 67.6 | 54.1 | 169.6 | 95.6 | 1.249 | 1.774 | |
| | | 75 | 150 | 85.0 | 67.1 | 213.0 | 114.2 | 1.266 | 1.866 | |
| | | 100 | 200 | 100.2 | 78.3 | 250.9 | 129.6 | 1.280 | 1.936 | |

| Soil type | Test/sample name | σ'_v (kPa) | σ'_h (kPa) | G'_{hh} (MPa) | G'_{vh} (MPa) | E'_h (MPa) | E'_v (MPa) | G'_{hh}/G'_{vh} | E'_h/E'_v | Data reference |
|-----------|------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|----------------|
| | | 125 | 250 | 113.7 | 88.2 | 284.5 | 142.8 | 1.289 | 1.992 | |
| | | 151 | 300 | 126.6 | 97.6 | 316.6 | 155.2 | 1.297 | 2.040 | |
| | | 174 | 350 | 137.9 | 105.8 | 344.6 | 165.7 | 1.304 | 2.079 | |
| | | 200 | 400 | 149.1 | 113.9 | 372.6 | 176.1 | 1.310 | 2.116 | |
| | 463 | 50 | 25 | 57.8 | 54.6 | 126.3 | 121.0 | 1.058 | 1.044 | |
| | | 100 | 51 | 81.5 | 75.9 | 177.7 | 172.3 | 1.074 | 1.032 | |
| | | 150 | 75 | 99.1 | 91.6 | 215.8 | 210.6 | 1.083 | 1.024 | |
| | | 200 | 100 | 114.1 | 104.7 | 248.1 | 243.4 | 1.090 | 1.020 | |
| | | 250 | 125 | 127.4 | 116.4 | 276.8 | 272.6 | 1.094 | 1.015 | |
| | | 300 | 150 | 139.4 | 126.9 | 302.6 | 298.9 | 1.098 | 1.012 | |
| | | 350 | 175 | 150.3 | 136.5 | 326.4 | 323.2 | 1.102 | 1.010 | |
| | | 400 | 200 | 160.7 | 145.4 | 348.6 | 346.1 | 1.105 | 1.007 | |
| | | 449 | 225 | 170.2 | 153.6 | 369.0 | 367.1 | 1.108 | 1.005 | |
| | | 500 | 250 | 179.5 | 161.7 | 389.1 | 387.8 | 1.110 | 1.003 | |
| | | 550 | 275 | 188.0 | 169.0 | 407.3 | 406.7 | 1.112 | 1.002 | |
| | 599 | 300 | 196.4 | 176.2 | 425.4 | 425.4 | 1.114 | 1.000 | | |
| | 462 | 49 | 51 | 75.0 | 61.8 | 177.3 | 141.7 | 1.214 | 1.252 | |
| | | 100 | 101 | 106.3 | 86.8 | 247.6 | 194.7 | 1.224 | 1.272 | |
| | | 151 | 152 | 130.5 | 106.0 | 301.2 | 234.8 | 1.231 | 1.283 | |
| | | 201 | 201 | 150.3 | 121.6 | 344.7 | 267.1 | 1.236 | 1.291 | |
| | | 250 | 250 | 167.8 | 135.4 | 382.8 | 295.3 | 1.239 | 1.296 | |
| | | 300 | 301 | 184.1 | 148.2 | 418.1 | 321.3 | 1.242 | 1.301 | |
| | | 350 | 351 | 199.2 | 160.0 | 450.6 | 345.2 | 1.245 | 1.305 | |
| | | 400 | 401 | 213.1 | 170.9 | 480.4 | 367.1 | 1.247 | 1.309 | |
| | | 449 | 450 | 225.8 | 180.8 | 507.8 | 387.1 | 1.249 | 1.312 | |
| | | 499 | 500 | 238.1 | 190.4 | 534.0 | 406.3 | 1.251 | 1.314 | |
| | | 549 | 549 | 249.7 | 199.4 | 558.9 | 424.5 | 1.252 | 1.317 | |
| | 599 | 600 | 261.2 | 208.3 | 583.3 | 442.2 | 1.254 | 1.319 | | |
| | 466 | 13 | 25 | 54.5 | 43.3 | 121.6 | 72.3 | 1.260 | 1.682 | |
| | | 26 | 51 | 77.0 | 59.6 | 176.7 | 99.2 | 1.292 | 1.781 | |
| | | 50 | 100 | 106.6 | 80.5 | 251.0 | 133.6 | 1.325 | 1.878 | |
| | | 76 | 151 | 131.0 | 97.4 | 313.0 | 161.2 | 1.345 | 1.942 | |
| | | 100 | 200 | 150.3 | 110.6 | 362.8 | 182.7 | 1.359 | 1.985 | |
| 126 | | 250 | 168.1 | 122.7 | 408.8 | 202.3 | 1.370 | 2.021 | | |
| 150 | | 299 | 183.6 | 133.1 | 449.1 | 219.1 | 1.379 | 2.049 | | |
| 175 | | 350 | 198.5 | 143.1 | 488.0 | 235.2 | 1.387 | 2.075 | | |
| 200 | | 401 | 212.0 | 152.1 | 523.5 | 249.6 | 1.394 | 2.097 | | |
| 225 | | 450 | 224.8 | 160.6 | 557.3 | 263.3 | 1.400 | 2.116 | | |
| 250 | | 500 | 236.5 | 168.2 | 588.2 | 275.7 | 1.406 | 2.134 | | |
| 275 | 549 | 248.0 | 175.8 | 618.6 | 287.7 | 1.410 | 2.150 | | | |

| Soil type | Test/sample name | σ'_v (kPa) | σ'_h (kPa) | G'_{hh} (MPa) | G'_{vh} (MPa) | E'_h (MPa) | E'_v (MPa) | G'_{hh}/G'_{vh} | E'_h/E'_v | Data reference |
|---|---------------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|---------------------|
| Toyoura sand simulated by Discrete Element Method (DEM) | Triaxial Extension (TE) | 45 | 100 | 140.1 | 106.1 | 357.8 | 205.7 | 1.320 | 1.739 | Gu et al. (2017) |
| | | 47 | 100 | 143.1 | 110.9 | 363.9 | 223.0 | 1.290 | 1.632 | |
| | | 50 | 100 | 146.6 | 116.9 | 373.0 | 245.3 | 1.254 | 1.521 | |
| | | 60 | 100 | 154.4 | 133.1 | 393.2 | 305.1 | 1.161 | 1.289 | |
| | | 70 | 100 | 159.7 | 144.9 | 404.4 | 347.6 | 1.102 | 1.163 | |
| | | 81 | 100 | 162.8 | 153.7 | 412.5 | 377.0 | 1.059 | 1.094 | |
| | Triaxial Compression (TC) | 120 | 100 | 169.0 | 172.8 | 425.7 | 449.0 | 0.978 | 0.948 | |
| | | 140 | 100 | 168.5 | 177.6 | 425.7 | 471.3 | 0.949 | 0.903 | |
| | | 160 | 100 | 167.0 | 180.1 | 421.6 | 487.5 | 0.927 | 0.865 | |
| | | 180 | 100 | 162.8 | 180.4 | 408.4 | 500.7 | 0.902 | 0.816 | |
| | | 190 | 100 | 159.2 | 180.1 | 399.3 | 504.7 | 0.884 | 0.791 | |
| | | 200 | 100 | 155.2 | 178.1 | 389.2 | 507.8 | 0.871 | 0.766 | |
| | | 210 | 100 | 150.4 | 175.6 | 374.0 | 506.8 | 0.857 | 0.738 | |
| | | 220 | 100 | 143.1 | 171.6 | 355.7 | 502.7 | 0.834 | 0.708 | |
| Toyoura sand | TS | 30 | 30 | 73.8 | 59.0 | 170.7 | 139.3 | 1.249 | 1.225 | Dutta et al. (2020) |
| | | 50 | 50 | 88.9 | 71.3 | 204.6 | 166.9 | 1.248 | 1.226 | |
| | | 100 | 100 | 122.4 | 101.5 | 274.3 | 242.3 | 1.206 | 1.132 | |
| | | 200 | 200 | 159.6 | 131.4 | 355.9 | 308.8 | 1.215 | 1.152 | |
| | | 400 | 400 | 216.9 | 177.7 | 480.1 | 413.0 | 1.221 | 1.163 | |
| Kashima river sand | RS | 30 | 30 | 60.9 | 61.3 | 170.6 | 138.5 | 0.994 | 1.232 | |
| | | 50 | 50 | 79.7 | 76.3 | 219.5 | 170.6 | 1.044 | 1.286 | |
| | | 100 | 100 | 108.9 | 102.6 | 299.0 | 221.7 | 1.061 | 1.349 | |
| | | 200 | 200 | 148.7 | 140.2 | 404.0 | 325.2 | 1.060 | 1.242 | |
| | | 400 | 400 | 203.1 | 191.5 | 553.4 | 436.0 | 1.061 | 1.269 | |
| Glass beads | GB | 30 | 30 | 63.0 | 55.9 | 169.2 | 132.7 | 1.128 | 1.275 | |
| | | 50 | 50 | 86.3 | 75.9 | 231.9 | 169.2 | 1.137 | 1.371 | |
| | | 100 | 100 | 121.7 | 113.5 | 328.1 | 277.1 | 1.073 | 1.184 | |
| | | 200 | 200 | 165.2 | 154.2 | 449.9 | 367.5 | 1.071 | 1.224 | |
| | | 400 | 400 | 225.2 | 203.3 | 593.5 | 481.3 | 1.108 | 1.233 | |

پیوست ب

با گسترش این عبارت، چنان‌که در ادامه نشان داده می‌شود، می‌توان اثبات کرد که همواره $\Delta > 0$:

عبارت Δ برای معادله (۱۵) عبارت است از:

$$\Delta = [E_v^u + 4(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) + (1 - 4\nu_{vh}')G_{hh}^u]^2 - 16E_v^u[(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) - \nu_{vh}'^2 G_{hh}^u]. \quad (1)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta = [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2 + 4G_{hh}^u E_v^u (1 - 2v'_{vh})^2 > 0. \quad (3)$$

پیوست ج

نشان داده شد که مطابق با معادله (۱۷)، ریشه اول عبارت

است از:

$$E'_v = 1/2 [E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + \sqrt{\Delta}]. \quad (17)$$

از این معادله می‌توان نامعادله (ج-۱) را استخراج نمود:

$$E'_v > 1/2 [E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + \quad (1)$$

$$\sqrt{[-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2}$$

با گسترش طرف راست این نامعادله خواهیم داشت:

$$E'_v > 1/2 [4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + E_v^u + |4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u - E_v^u|] = \max[4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u, E_v^u]. \quad (2)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که $E'_v > E_v^u$ ، که از نظر مکانیکی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

به طور مشابه، نشان داده شد که ریشه دوم (معادله (۱۸))

عبارت است از:

$$E'_v = 1/2 [E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u - \sqrt{\Delta}]. \quad (3)$$

می‌توان از این معادله، نامعادله (ج-۴) را بیان نمود:

$$\Delta = [E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})]^2 \quad (2)$$

$$+ 2[E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})](1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u$$

$$+ [(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2 - 16E_v^u (G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= E_v^{u2} + 8E_v^u (G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + 16(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})^2$$

$$+ 2[E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})](1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + [(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2$$

$$- 16E_v^u (G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= E_v^{u2} - 8E_v^u (G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + 16(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})^2$$

$$+ 2[E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})](1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + [(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2 + 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})]^2$$

$$+ 2[E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})](1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u$$

$$+ [(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2 + 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2$$

$$- 2[-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})][(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]$$

$$+ 2[E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})](1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2$$

$$- 2(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) - E_v^u - 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8})]$$

$$+ 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2$$

$$+ 4(1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u E_v^u + 16E_v^u v_{vh}'^2 G_{hh}^u$$

$$= [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2$$

$$+ 4G_{hh}^u E_v^u (1 - 4v'_{vh} + 4v_{vh}'^2)$$

$$= [-E_v^u + 4(G_{vh}^{u\ 1.8}/G_{hh}^{u\ 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2 +$$

$$4G_{hh}^u E_v^u (1 - 2v'_{vh})^2.$$

بر مبنای معادله (۵)، داریم $E'_v < E_v^u$ ، که از نظر مکانیکی منطقی و صحیح است و خود تأیید کننده‌ی صحت معادله (۱۸) است.

$$E'_v < 1/2 \left[E_v^u + 4(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u - \sqrt{[-E_v^u + 4(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u]^2} \right] \quad (۴)$$

با گسترش طرف راست داریم:

$$E'_v < 1/2 \left[4(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u + E_v^u - \left[4(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u - E_v^u \right] \right] = \min[4(G_{vh}^{u 1.8}/G_{hh}^{u 0.8}) + (1 - 4v'_{vh})G_{hh}^u, E_v^u] \quad (۵)$$